Prof. Dr. H. Maier
Dipl.-Math. D. Haase
daniel.haase@uni-ulm.de

25.10.2007
WS 2007/2008

Lineare Algebra für Informatiker - Übungsblatt 2

Abgabe bis spätestens 01.11.2007 16:15 Uhr im Abgabekasten vor dem H3

Aufgabe 7 (Binäre Verknüpfungen) 3 Punkte

Betrachten Sie die bekannten binären Verknüpfungen auf $\mathbb{B} = \{0, 1\}$:

$$\begin{array}{c|cc} \wedge & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|cc} \vee & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Bestimmen Sie für jede Verknüpfung, welche der Axiome G2 und G3 aus der Vorlesung gültig sind (Beweis durch Angabe sämtlicher neutralen und inversen Elemente, oder Gegenbeispiel).

Aufgabe 8 (Gruppenarbeit) 3 Punkte

Es seien a, b, c irgendwelche Symbole. Konstruieren Sie durch Ausfüllen der Wertetabelle eine Verknüpfung auf der Menge $X = \{a, b, c\}$, so dass $(X, \circ)$ eine abelsche Gruppe bildet, d. h. die Axiome G1,G2,G3,G4 erfüllt sind:

$\circ$	a	b	c
a			
b			
c			

Sie bekommen die Punkte auf die ausgefüllte Tabelle, und brauchen hier nichts zu beweisen.

Tipp: Versuchen Sie Regeln aufzustellen, wie die Spalten und Zeilen aussehen müssen, damit G2/G3/G4 gelten.

Aufgabe 9 (Geraden in $\mathbb{Z}$) 3 Punkte

Wenn wir die Punkt-Richtungs-Gleichung für Geraden aus Kapitel 1 abstrakt auf $\mathbb{Z}$ übertragen ist eine „Gerade“ in $\mathbb{Z}$ eine Menge der Form

$$g = \{a + t \cdot u \ : \ t \in \mathbb{Z}\}$$

wobei der Aufpunkt a und der Richtungsvektor $u \neq 0$ nun ganze Zahlen anstatt Punkte im Raum sind, und der Parameter t über $\mathbb{Z}$ statt $\mathbb{R}$ läuft. Zeigen Sie dass in $\mathbb{Z}$ (im Gegensatz zu $\mathbb{R}$) die Anschauung trügt, in dem Sie Beispiele dafür konstruieren

(a) dass zwei verschiedene Geraden mehrere Schnittpunkte haben können,
(b) dass zwei verschiedene Punkte nicht mehr eindeutig eine Gerade festlegen müssen.

Aufgabe 10 (Mit Permutationen rechnen) 5 Punkte

Betrachten Sie die Permutationen

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \ , \ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} .$$

aus der Gruppe γ_5 (vgl. Beispiel 2.2.7 aus der Vorlesung), und berechnen Sie die Permutationen

$$\tau \circ \sigma \ , \ \sigma \circ \tau \ , \ \sigma^2 \ , \ \sigma^3 \ , \ \sigma^5 \ , \ \tau^{-1} \ , \ \sigma^{500000} .$$

Aufgabe 11 (Permutationenzahl) 2 Punkte

Berechnen Sie die Anzahl $|\gamma_n|$ der Permutationen von n Zahlen (mit kurzer Begründung).