Prof. Dr. H. Maier
Dipl.-Math. D. Haase
daniel.haase@uni-ulm.de

30.10.2007
WS 2007/2008

Lineare Algebra für Informatiker - Übungsblatt 3

Abgabe bis spätestens 08.11.2007 16:15 Uhr im Abgabekasten vor dem H3

Melden Sie sich im SLC-System für die Vorlesung an:

Knopf „Vorlesungsanmeldung“, dann MA050-Lineare Algebra für Informatiker im Eingabefeld oben auswählen.

Aufgabe 12 (Die Restklassen modulo n) 3 Punkte

Diese und die folgende Aufgabe werden auf zukünftigen Blättern fortgeführt!

Es sei n eine feste natürliche Zahl und $\bar{a} = \{a + kn \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ für $a \in \mathbb{Z}$ die „Gerade“ vom letzten Übungsblatt. Das Mengensystem aller dieser Mengen bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}_n = \{\bar{a} \,:\, a \in \mathbb{Z}\}$, man nennt es den *Restklassenring modulo n* und $\bar{a}$ die *Restklasse* von a modulo n. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Mengen $\bar{a}$ und $\bar{b}$ sind genau dann gleich, wenn $a - b$ durch n ohne Rest teilbar ist.
(b) Der Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ enthält genau n Mengen.

Aufgabe 13 (Rechnen mit Restklassen) 4 Punkte

Wieder sei $n \in \mathbb{Z}$ fest. Wir definieren die Summe von Teilmengen aus $\mathbb{Z}$ über

$$R + S \;=\; \{r + s \,:\, r \in R\,,\, s \in S\}\,.$$

Zeigen Sie zunächst die Regel $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$, wobei $\bar{a} = \{a + kn \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ die Restklasse von a modulo n ist. Zeigen Sie nun ausführlich durch Nachrechnung aller Axiome, dass $(\mathbb{Z}_n, +)$ eine abelsche Gruppe bildet.

Achtung: In diesen beiden Aufgaben bezeichnet $\bar{a}$ eine der Zahl a zugeordnete Menge. In den folgenden Aufgaben ist $\bar{z}$ die konjugierte komplexe Zahl von z. Beide Schreibweisen haben sich in der Mathematik eingebürgert, wir unterscheiden Sie, indem wir ganze Zahlen mit niedrigen Buchstaben $a, b, c, \ldots$ und komplexe Zahlen mit höheren Buchstaben $z, w, s, \ldots$ bezeichnen.

Aufgabe 14 (Die Polardarstellung) 3 Punkte

Betrachten Sie die Abbildung $\Phi :\; (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{C} - \{0\}\;,\; (r, \phi) \mapsto r \cdot (\cos(\phi) + i \sin(\phi))$. Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine Bijektion ist, d. h. jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ (mit der Ausnahme $z = 0$) kann mit einem Paar (r, ϕ) identifiziert werden.

Aufgabe 15 (Rechnen mit komplexen Zahlen) 2 Punkte

Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Darstellung $z = x + iy$:

$$z = \frac{2i}{1-i} \;\;,\;\; \omega = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \;\;,\;\; \omega^4 \;\;,\;\; n = \sum_{k=0}^{7} \omega^k \,.$$

Tipp zur letzen Summe: die Real- und Imaginärteile auszurechnen und aufzuaddieren ist nicht die beste Lösung. Teilen Sie die Summe in zwei gleichgroße Teile und vergleichen Sie beide unter Verwendung des Ergebnisses für ω^4.

Aufgabe 16 (Rechnen mit der Konjugation) 4 Punkte

Beweisen Sie Satz 2.4.5 der Vorlesung durch direkte Rechnung:

(a) Es ist $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ (hat nichts mit Aufgabe 13 zu tun).
(b) Es ist $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, sowie $\overline{w^{-1}} = (\bar{w})^{-1}$.
(c) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Insbesondere gilt $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.