Prof. Dr. H. Maier
Dipl.-Math. D. Haase
daniel.haase@uni-ulm.de

08.11.2007
WS 2007/2008

Lineare Algebra für Informatiker - Übungsblatt 4

Abgabe bis spätestens 15.11.2007 16:15 Uhr im Abgabekasten vor dem H3

Aufgabe 17 (Rechnen mit Restklassen) **2 Punkte**

Die Menge $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ bildet mit den Operationen $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ bzw. $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ einen Ring. Berechnen Sie die folgenden Restklassen, indem Sie den kleinsten nichtnegativen Vertreter finden, der den Wert darstellt:

(a) Modulus $n = 5$: $\bar{b} = \bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \bar{3} \cdot \bar{4}$.
(b) Modulus $n = 3$: $\bar{d} = \bar{2}^k$ für $k \in \mathbb{N}$.
(c) Modulus $n = 7$, $\bar{a}$ ist die Lösung der quadratischen Gleichung $\bar{a}^2 + \bar{3} \cdot \bar{a} + \bar{4} = \bar{0}$.

Aufgabe 18 (Der Vektorraumbegriff) **3 Punkte**

Prüfen Sie für die folgenden Beispiele, ob die Tripel $(V, K, \odot)$ Vektorräume bilden (Beweis oder Gegenbeispiel):

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, -\lambda y)$.
(b) $K = \mathbb{B} = \mathbb{Z}_2$, $V = K^n$, $\lambda \odot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.
(c) K irgend ein Körper, $V = A \times B$, A, B irgendwelche K-Vektorräume, $\lambda \odot (\vec{a}, \vec{b}) = (\lambda \odot_1 \vec{a}, \lambda \odot_2 \vec{b})$, wobei $\odot_1$ bzw. $\odot_2$ die Skalarmultiplikationen aus A bzw. B sind.

Aufgabe 19 (Untervektorräume) **3 Punkte**

In den folgenden Beispielen ist jeweils V ein K-Vektorraum (brauchen Sie nicht zu zeigen), und $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Entscheiden Sie (mit Begründung versteht sich), ob U auch ein Untervektorraum von V ist:

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[x]$ der Raum der reellen Polynome, $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ p(x) \text{ hat Grad } \leq n\}$.
(b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$, $U = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$.
(c) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}$, $U = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$.
(d) $K = \mathbb{R}$, $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $U = \{f \in V \ : \ f(\alpha) = \beta\}$ für feste $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Achtung: Fallunterscheidung nötig).
(e) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y = 0\}$.

Aufgabe 20 (Schnitte) **3 Punkte**

Beweisen Sie Satz 3.2.10 der Vorlesung: Ist V ein K-Vektorraum und (M_λ) eine Familie von Unterräumen von V, so ist auch der Schnitt $\bigcap_\lambda M_\lambda$ ein Unterraum von V. Zeigen Sie auch, dass die Aussage für die Vereinigung falsch ist.

Aufgabe 21 (Das Erzeugnis) **3 Punkte**

Prüfen Sie, welche der folgenden Untermengen des $\mathbb{R}^3$ den ganzen Raum $\mathbb{R}^3$ erzeugen:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

Aufgabe 22 (Das Erzeugnis und die Summe) **2 Punkte**

Es sei K ein Körper und $K[x]$ der K-Vektorraum der Polynome über K. Zeigen Sie ausführlich, dass die folgenden drei Mengen gleich sind:

- $A = \langle 1, x, x^2 \rangle$, das Erzeugnis (Definition 3.2.11) der Monome $1, x, x^2 \in K[x]$.
- $B = \langle 1 \rangle + \langle x \rangle + \langle x^2 \rangle$, die Summe (Definition 3.2.16) der Monomerzeugnisse.
- $C = \{p(x) \in V \ : \ \deg(p) \leq 2\}$, die Menge der Polynome vom Grad ≤ 2.