Prof. Dr. H. Maier
Dipl.-Math. D. Haase
daniel.haase@uni-ulm.de

25.10.2007
WS 2007/2008

Lineare Algebra für Informatiker - Lösungsblatt 1

Zur Übungsstunde vom 25.10.2007

Aufgabe 1 (Ihre Gruppe)

Melden Sie sich für eine Tutoriumsgruppe an. Den Link zur Anmeldung finden Sie auf der Vorlesungshomepage:

`www.mathematik.uni-ulm.de/matheIII/haase/LAI/index.html`

Sie benötigen auch einen SLC-Account an der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften, weitere Informationen finden Sie auf der Homepage.

Lösung

...weitere Anmeldungen bitte mit den Tutoren selbst ausmachen,

Aufgabe 2 (Elementare Geometrie in der Ebene) **3 Punkte**

Gegeben seien die folgenden Geraden in der xy-Ebene (die wir mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren):

$$g_1 : \ 3x = y - 1 \qquad g_2 : \ x = 0 \qquad g_3 : \ 6x - 4y = -1 \quad .$$

Bestimmen Sie wie in Beispiel 1.1.2 Punkt-Richtungs-Gleichungen dieser Geraden, und finden Sie alle auftretenden Schnittpunkte zwischen diesen Geraden. Skizzieren Sie die drei Geraden.

Lösung

Für g_1 wählen wir die erste Koordinate als freien Parameter $r \in \mathbb{R}$ und erhalten $x = r$ sowie $3r = y - 1 \Rightarrow y = 3r + 1$, also

$$g_1 : \begin{cases} x &= 0 + r \\ y &= 1 + 3r \end{cases} .$$

In der zweiten Gleichung kann man x nicht als freien Parameter wählen (da die erste Koordinate stets konstant ist). Wählt man $y = s$ als freien Parameter, so ergibt sich

$$g_2 : \begin{cases} x &= 0 \\ y &= s \end{cases} .$$

In der dritten Gleichung kann man wieder $x = t$ als freien Parameter wählen und erhält $6t - 4y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}t$, also

$$g_3 : \begin{cases} x &= 0 + t \\ y &= \frac{1}{4} + \frac{3}{2}t \end{cases} .$$

Wir bestimmen die Schnittpunkte: Der Schnitt von g_1 und g_2 ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$(*) \qquad \begin{cases} x &= 0 + r \\ y &= 1 + 3r \\ x &= 0 \\ y &= s \end{cases} ,$$

exakt formuliert ist es die Menge

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \exists r, s \in \mathbb{R} : \text{System } (*) \text{ erfüllt}\right\} .$$

Aus der dritten und der ersten Gleichung folgt, dass $x = r = 0$ sein muss, dann folgt aus der zweiten Gleichung $y = 1$. Die vierte Gleichung liefert dann $s = 1$. Das Quadrupel $(x, y, r, s) = (0, 1, 0, 1)$ ist also die einzige Lösung von $(*)$, d. h. es gibt genau einen Schnittpunkt in $(0, 1)$. Analog führt Vergleich von g_2 und g_3 auf

$$(**) \qquad \begin{cases} x &= 0 \\ y &= s \\ x &= 0 + t \\ y &= \frac{1}{4} + \frac{3}{2}t \end{cases}$$

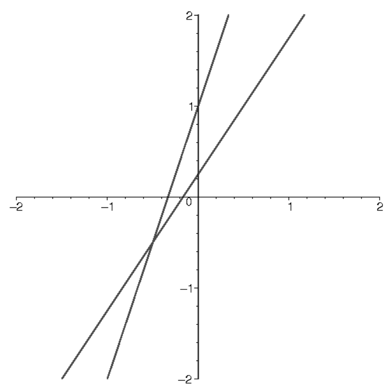
und die einzige Lösung $(x,y,s,t) = (0,\frac{1}{4},\frac{1}{4},0)$ und damit auf den Schnittpunkt $(0,\frac{1}{4})$. Vergleich von g_1 und g_3 ergibt dagegen das System

$$(***) \qquad \begin{cases} x &= 0 &+ &r \\ y &= 1 &+ &3r \\ x &= 0 &+ &t \\ y &= \frac{1}{4} &+ &\frac{3}{2}t \end{cases}.$$

Die erste und die dritte Gleichung erzwingen $x = r = t$. Gleichsetzen der zweiten mit der vierten Gleichung ergibt dann $y = 1 + 3r = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}r$. Auflösen nach r ergibt

$$\begin{cases} y &= 1 + 3r \\ y &= \frac{1}{4} + \frac{3}{2}r \end{cases} \Rightarrow\ 1 + 3r = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}r \ \Rightarrow\ 4 + 12r = 1 + 6r \ \Rightarrow\ 6r = -3 \ \Rightarrow\ r = -\frac{1}{2}$$

und mit $y = 1 + 3r = -\frac{1}{2}$ damit die einzige Lösung $(x,y,r,t) = (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ bzw. den Schnittpunkt in $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.



Aufgabe 3 (Elementare Geometrie im Raum) — 2 Punkte

Bestimmen Sie jeweils eine Punkt-Richtungs-Gleichung sowie den Schnitt der Ebenen

$$E_1 :\ x + 2y - z = 1 \quad , \quad E_2 :\ x - 2y = 0\,.$$

Lösung

Für E_1 wählen wir $x = r$ und $y = s$ als freie Parameter, und erhalten $r + 2s - z = 1 \Rightarrow z = -1 + r + 2s$ und damit die Punkt-Richtungs-Gleichung

$$E_1 : \begin{cases} x &= 0 &+ r & \\ y &= 0 & &+ s \\ z &= -1 &+ r &+ 2s \end{cases}.$$

Für die zweite Ebene ist y abhängig von x, wir wählen daher $x = t$ und $z = u$ als freie Parameter und erhalten mit $t - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}t$ diese Punkt-Richtungs-Gleichung

$$E_2 : \begin{cases} x &= t \\ y &= \frac{1}{2}t \\ z &= u \end{cases}.$$

Vergleich der Ebenen führt auf das lineare Gleichungssystem

$$E_1 \cap E_2 : \begin{cases} x &= 0 &+ r & \\ y &= 0 & &+ s \\ z &= -1 &+ r &+ 2s \\ x &= t & & \\ y &= \frac{1}{2}t & & \\ z &= u & & \end{cases}.$$

Aus der ersten und vierten Gleichung folgt $x = r = t$, aus der zweiten und fünften Gleichung dagegen $y = s = \frac{1}{2}t$. Gleichsetzen der dritten mit der sechsten Gleichung führt auf $z = u = -1+r+2s = -1+r+2(\frac{1}{2}t) = -1+r+t = -1+2t$.

Für jede Wahl von $t \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem daher die Lösung $(x, y, z, r, s, t, u) = (t, \frac{1}{2}t, -1+2t, t, \frac{1}{2}t, t, -1+2t)$ und damit die Schnittgerade

$$g : \begin{cases} x &= 0 + t \\ y &= 0 + \frac{1}{2}t \\ z &= -1 + 2t \end{cases}$$

in Punkt-Richtungs-Form mit freiem Parameter t.

Aufgabe 4 (Abbildungseigenschaften) 6 Punkte

Prüfen Sie (mit Beweis oder Gegenbeispiel), welche dieser Abbildungen surjektiv, injektiv oder sogar bijektiv sind.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a \cdot x + b \end{cases} \ (\text{mit } a, b \in \mathbb{R}) \quad , \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases} \quad , \quad d : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (x, x, \ldots, x) \end{cases} \quad ,$$

$$h : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & a \cdot n \end{cases} \ (\text{mit } a \in \mathbb{N}) \quad , \quad q : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{Q} \\ (a, b) & \mapsto & \frac{a}{b} \end{cases} \quad , \quad r : \begin{cases} \{0, 1\} & \to & \{0, 1\} \\ b & \mapsto & 1 - b \end{cases} \quad .$$

Für jede Abbildung müssen Sie einen Beweis für Ihre Behauptung führen, oder ein Gegenbeispiel angeben.

Lösung

Wir müssen die Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$ unterscheiden: Im ersten Fall ist $f(x) = b$ konstant, die Abbildung ist dann nicht surjektiv, weil beispielsweise $b+1$ nie als Bild auftreten kann, sie ist auch nicht injektiv weil aus $1 \neq 2$ nicht $f(1) \neq f(2)$ folgt. Im zweiten Fall $a \neq 0$ ist die Abbildung dagegen bijektiv: Sie surjektiv da für jedes $y \in \mathbb{R}$ der Wert $x = \frac{1}{a}(y - b)$ ein Urbild ist, denn es gilt

$$f(\tfrac{1}{a}(y - b)) \; = \; a\tfrac{1}{a}(y - b) + b \; = \; y - b + b \; = \; y \, .$$

Sie ist auch injektiv, denn aus $f(x) = f(x')$ folgt

$$ax + b = ax' + b \underset{-b}{\Rightarrow} ax = ax' \underset{:a}{\Rightarrow} x = x' \, .$$

Die Abbildung ist also bijektiv, falls $a \neq 0$ ist.

Die Abbildung g ist nicht injektiv wegen $g(1) = g(-1)$. Sie ist auch nicht surjektiv, da es keine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$ gibt. Damit ist sie auch nicht bijektiv.

Auch für d ist eine Fallunterscheidung nötig: ist $n = 1$ so ist $d : x \mapsto (x)$ bis auf die Schreibweise des Bildes die Identität, und damit bijektiv. Ist $n \geq 2$, so ist die Abbildung noch injektiv, denn aus $x \neq x'$ folgt auch $(x, \ldots, x) \neq (x', \ldots, x')$, sie ist aber nicht mehr surjektiv, denn beispielsweise hat $(1, 0, \ldots, 0)$ kein Urbild (in dieser Schreibweise geht versteckt ein, dass wir hier $n \geq 2$ annehmen).

Die Abbildung h ist für $a = 1$ die Identität und damit bijektiv. Ist $a \geq 2$, so ist die Abbildung injektiv (mit der gleichen Rechnung wie für die Abbildung f), sie ist aber nicht surjektiv, $a + 1$ kein Urbild besitzt: angenommen $a + 1 = h(n)$, dann folgt

$$a + 1 = a \cdot n \;\Rightarrow\; n = \frac{a+1}{a} \;\Rightarrow\; n = 1 + \frac{1}{a} \, .$$

Wegen der Annahme $a > 1$ ist das keine natürliche Zahl, also kann n kein Urbild (aus $\mathbb{N}$) sein. Wäre die Abbildung h auf $\mathbb{R}$ statt auf $\mathbb{N}$ definiert, so wäre sie bijektiv.

Die Abbildung q ist surjektiv, denn die Menge $\mathbb{Q}$ besteht aus allen Brüchen $\frac{a}{b}$, und ist $b \in \mathbb{Z}$ negativ, so kann $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$ benutzt werden um $\frac{a}{b} = q(-a, -b)$ als Bild unter q zu erkennen. Die Abbildung ist aber nicht injektiv, weil beispielsweise $q(1, 1) = q(2, 2)$ ist obwohl $(1, 1) \neq (2, 2)$ ist.

Die Abbildung r ist injektiv, denn die einzige Möglichkeit verschiedene Elemente im Definitionsbereich zu wählen ist $b = 0$ und $b' = 1$, aber es ist $r(0) \neq r(1)$. Sie ist auch surjektiv, denn das Urbild von 0 ist 1, und das Urbild von 1 ist 0. Damit ist die Abbildung bijektiv.

Aufgabe 5 (Mengen und Abbildungen) 2 Punkte

Es seien A und B nichtleere Mengen. Die Menge der Abbildungen $f : A \to B$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Abb}(A, B)$ oder auch kurz mit B^A. Mit $\mathfrak{P}(A)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von A, das ist die Menge aller Teilmengen von A (inklusive $\emptyset$ und A selbst). Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in B^A und $\mathfrak{P}(A)$ falls A und B endliche Mengen sind, und begründen Sie kurz ihre Anzahl.

Lösung

Es sei $|A|$ die Anzahl der Elemente von A und $|B|$ die Anzahl der Elemente von B, dann ist

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$$

denn für jedes $a \in A$ hat man genau $|B|$ Möglichkeiten einen Wert $f(a)$ festzusetzen.

Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(A)$ hat $|\mathfrak{P}(A)| = 2^{|A|}$ Elemente, denn für jedes Element $a \in A$ gibt es die genau zwei Möglichkeiten $a \in M$ oder $a \notin M$ für jedes $M \in \mathfrak{P}(A)$.

Aufgabe 6 (Eine Beweisaufgabe) 3 Punkte

Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ beliebige Abbildungen, und $g \circ f : A \to C$ die zusammengesetzte Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind f und g jeweils surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.
(b) Sind f und g jeweils injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.

Lösung

Zu a): Die Annahme ist, dass f und g surjektiv sind. Wir müssen zeigen, dass es zu jedem $c \in C$ ein $a \in A$ gibt mit $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$. Zunächst gibt es ein $b \in B$ mit $g(b) = c$ da g surjektiv ist. Dann gibt es auch $a \in A$ mit $f(a) = b$ da f surjektiv ist. Es folgt $g(f(a)) = g(b) = c$. Da $c \in C$ beliebig war ist $g \circ f$ surjektiv, denn es gibt stets ein Urbild.

Zu b): Beweis durch Widerspruch: angenommen $g \circ f$ wäre nicht injektiv, dann gibt es $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$ aber $g(f(a)) = g(f(a'))$. Wir setzen $f(a) = b$ und $f(a') = b'$, also ist $g(b) = g(b')$. Da wir annehmen, dass g injektiv ist, folgt $b = b'$. Wegen $f(a) = b$ und $f(a') = b'$ und der Annahme der Injektivität von f folgt nun $a = a'$, ein Widerspruch zu $a \neq a'$, also war die Annahme falsch, dass $g \circ f$ nicht injektiv ist.