Prof. Dr. H. Maier
Dipl.-Math. D. Haase
daniel.haase@uni-ulm.de

01.11.2007
WS 2007/2008

Lineare Algebra für Informatiker - Lösungsblatt 2

Zur Übungsstunde vom 01.11.2007

Aufgabe 7 (Binäre Verknüpfungen) — 3 Punkte

Betrachten Sie die bekannten binären Verknüpfungen auf $\mathbb{B} = \{0, 1\}$:

$$\begin{array}{c|cc} \wedge & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|cc} \vee & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Bestimmen Sie für jede Verknüpfung, welche der Axiome G2 und G3 aus der Vorlesung gültig sind (Beweis durch Angabe sämtlicher neutralen und inversen Elemente, oder Gegenbeispiel).

Lösung

Die UND-Verknüpfung $\wedge$ erfüllt das Axiom G2, das neutrale Element ist die Eins: $1 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 0$ und $1 \wedge 1 = 1$, also $1 \wedge a = a \wedge 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{B}$. Das Axiom G3 ist dagegen verletzt: Die Null hat kein inverses Element, denn $0 \wedge a = 1$ ist für kein $a \in \mathbb{B}$ erfüllt.

Die ODER-Verknüpfung $\vee$ erfüllt ebenfalls G2, jetzt aber mit der Null als neutralem Element, denn es ist $0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1$ und $0 \vee 0 = 0$, also $0 \vee a = a \vee 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{B}$. Auch hier ist G3 verletzt: Es gibt kein inverses Element für die Eins, denn $1 \vee a = 0$ ist unmöglich.

Die XOR-Verknüpfung $\oplus$ erfüllt G2, das neutrale Element ist wieder die Null wegen $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$ und $0 \oplus 0 = 0$, also $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ für alle $a \in \mathbb{B}$. Die Verknüpfung $\oplus$ erfüllt auch G3: das inverse Element von 0 ist 0 wegen $0 \oplus 0 = 0 =$ Neutrales, und anderseits ist das inverse Element der Eins die Eins wegen $1 \oplus 1 = 0 =$ Neutrales.

Tatsächlich bildet $(\mathbb{B}, \oplus)$ eine abelsche Gruppe, wir werden sie noch öfter verwenden.

Aufgabe 8 (Gruppenarbeit) — 3 Punkte

Es seien a, b, c irgendwelche Symbole. Konstruieren Sie durch Ausfüllen der Wertetabelle eine Verknüpfung auf der Menge $X = \{a, b, c\}$, so dass $(X, \circ)$ eine abelsche Gruppe bildet, d. h. die Axiome G1,G2,G3,G4 erfüllt sind:

$\circ$	a	b	c
a			
b			
c			

Sie bekommen die Punkte auf die ausgefüllte Tabelle, und brauchen hier nichts zu beweisen.

Tipp: Versuchen Sie Regeln aufzustellen, wie die Spalten und Zeilen aussehen müssen, damit G2/G3/G4 gelten.

Lösung

Es gibt mehrere Möglichkeiten. Eine davon ist

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

wenn man a als neutrales Element wählt, alle anderen möglichen Tabellen entstehen durch Permutationen aus γ_3 angewendet auf die Einträge. Die Axiome kann man wie folgt nachprüfen:

- G2: In der Spalte des neutralen Elements werden einfach die ursprünglichen Elemente eingetragen, ebenso für die Zeile des neutralen Elements.

G3: In jeder Spalte steht ein neutrales Element, und in jeder Zeile steht ein neutrales Element.
G4: Die Tabelle ist symmetrisch, d. h. an der Position (i, j) steht das Gleiche wie an der Position (j, i).

G1 muss man „per Hand“ nachrechnen.

Aufgabe 9 (Geraden in $\mathbb{Z}$) — 3 Punkte

Wenn wir die Punkt-Richtungs-Gleichung für Geraden aus Kapitel 1 abstrakt auf $\mathbb{Z}$ übertragen ist eine „Gerade“ in $\mathbb{Z}$ eine Menge der Form

$$g = \{a + t \cdot u \; : \; t \in \mathbb{Z}\}$$

wobei der Aufpunkt a und der Richtungsvektor $u \neq 0$ nun ganze Zahlen anstatt Punkte im Raum sind, und der Parameter t über $\mathbb{Z}$ statt $\mathbb{R}$ läuft. Zeigen Sie dass in $\mathbb{Z}$ (im Gegensatz zu $\mathbb{R}$) die Anschauung trügt, in dem Sie Beispiele dafür konstruieren

(a) dass zwei verschiedene Geraden mehrere Schnittpunkte haben können,
(b) dass zwei verschiedene Punkte nicht mehr eindeutig eine Gerade festlegen müssen.

Lösung

Zu a): Ein mögliches Beispiel sind die Geraden

$$g_1 = \{1 + 3k \; : \; k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\} \quad , \quad g_2 = \{0 + 2k \; : \; k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$

die verschieden sind wegen $0 \in g_1$ aber $0 \notin g_2$, und andererseits die Schnittpunkte -2 und 4 besitzen.

Zu b): Das folgt aus (a), denn die Punkte -2 und 4 legen nicht eindeutig eine Gerade fest, weil die zwei verschiedenen Geraden g_1 und g_2 durch sie durchgehen.

Aufgabe 10 (Mit Permutationen rechnen) — 5 Punkte

Betrachten Sie die Permutationen

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} .$$

aus der Gruppe γ_5 (vgl. Beispiel 2.2.7 aus der Vorlesung), und berechnen Sie die Permutationen

$$\tau \circ \sigma \quad , \quad \sigma \circ \tau \quad , \quad \sigma^2 \quad , \quad \sigma^3 \quad , \quad \sigma^5 \quad , \quad \tau^{-1} \quad , \quad \sigma^{500000} .$$

Lösung

Die Lösungen sind

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\sigma^3 = \sigma \circ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^5 = \sigma^2 \circ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{id} \quad , \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \tau$$

und schließlich

$$\sigma^{500000} = (\sigma^5)^{100000} = (\mathrm{id})^{100000} = \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 11 (Permutationenzahl) — 2 Punkte

Berechnen Sie die Anzahl $|\gamma_n|$ der Permutationen von n Zahlen (mit kurzer Begründung).

Lösung

Für eine Permutation $\tau \in \gamma_n$ gibt es die folgenden Wertemöglichkeiten

- Für $\tau(1)$ kann man eine der Zahlen $1, \ldots, n$ wählen, das sind n Möglichkeiten.
- Für $\tau(2)$ kann man eine der Zahlen $1, \ldots, n$ wählen, aber nicht $\tau(1)$, da sonst wegen $\tau(1) = \tau(2)$ die Injektivität verletzt wäre, es gibt also $n - 1$ Möglichkeiten.
- Für $\tau(3)$ kann man eine der Zahlen $1, \ldots, n$ wählen, aber nicht $\tau(1)$ und auch nicht $\tau(2)$, es gibt also $n - 2$ Möglichkeiten.

$$\vdots$$

- Für $\tau(n)$ hat man jetzt nur noch eine einzige Möglichkeit, nämlich das einzige Element, das nicht unter den $\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n-1)$ ist.

Zur Konstruktion einer Permutation τ gibt es also $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten, also $|\gamma_n| = n!$.