Prof. Dr. H. Maier
Dipl.-Math. D. Haase
daniel.haase@uni-ulm.de

15.11.2007
WS 2007/2008

Lineare Algebra für Informatiker - Lösungsblatt 4

Zur Übungsstunde vom 15.11.2007

Aufgabe 17 (Rechnen mit Restklassen) — 2 Punkte

Die Menge $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ bildet mit den Operationen $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ bzw. $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ einen Ring. Berechnen Sie die folgenden Restklassen, indem Sie den kleinsten nichtnegativen Vertreter finden, der den Wert darstellt:

(a) Modulus $n = 5$: $\bar{b} = \bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \bar{3} \cdot \bar{4}$.
(b) Modulus $n = 3$: $\bar{d} = \bar{2}^k$ für $k \in \mathbb{N}$.
(c) Modulus $n = 7$, $\bar{a}$ ist die Lösung der quadratischen Gleichung $\bar{a}^2 + \bar{3} \cdot \bar{a} + \bar{4} = \bar{0}$.

Lösung

Zu (a): Es gilt $\bar{b} = \bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \bar{3} \cdot \bar{4} = \overline{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \overline{24} = \bar{4}$.

Zu (b): Es gilt

$$\bar{d} \;=\; \bar{2}^k \;=\; \begin{cases} \bar{1} & \text{falls} \quad k \text{ gerade} \\ \bar{2} & \text{falls} \quad k \text{ ungerade} \end{cases},$$

denn für $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$ bzw $\bar{1} = \bar{1}$, $\bar{2} = \bar{2}$, $\bar{4} = \bar{1}$ ist die Aussage richtig, und ist sie für ein $k \in \mathbb{N}$ richtig, so auch für $k+1$, denn es gilt $\bar{2}^{k+1} = \bar{2}^k \cdot \bar{2}$ mit $\bar{1} \cdot \bar{2} = \bar{2}$ und umgekehrt $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{1}$.

Zu (c):
Da es nur 7 Restklassen in $\mathbb{Z}_7$ gibt kann man alle möglichen Eingaben für das Polynom $f(x) = x^2 + \bar{3}x + \bar{4}$ ausprobieren:

$$\begin{array}{rclclcll}
f(\bar{0}) & = & \bar{0}^2 + \bar{3} \cdot \bar{0} + \bar{4} & = & \bar{4} & \neq & \bar{0} & \\
f(\bar{1}) & = & \bar{1}^2 + \bar{3} \cdot \bar{1} + \bar{4} & = & \bar{8} & \neq & \bar{0} & \\
f(\bar{2}) & = & \bar{2}^2 + \bar{3} \cdot \bar{2} + \bar{4} & = & \overline{14} & = & \bar{0} & \leftarrow \text{Lösung} \\
f(\bar{3}) & = & \bar{3}^2 + \bar{3} \cdot \bar{3} + \bar{4} & = & \overline{22} & \neq & \bar{0} & \\
f(\bar{4}) & = & \bar{4}^2 + \bar{3} \cdot \bar{4} + \bar{4} & = & \overline{32} & \neq & \bar{0} & \\
f(\bar{5}) & = & \bar{5}^2 + \bar{3} \cdot \bar{5} + \bar{4} & = & \overline{44} & \neq & \bar{0} & \\
f(\bar{6}) & = & \bar{6}^2 + \bar{3} \cdot \bar{6} + \bar{4} & = & \overline{58} & \neq & \bar{0} &
\end{array}$$

also ist die gesuchte Lösung $\bar{a} = \bar{2}$.

Aufgabe 18 (Der Vektorraumbegriff) — 3 Punkte

Prüfen Sie für die folgenden Beispiele, ob die Tripel $(V, K, \odot)$ Vektorräume bilden (Beweis oder Gegenbeispiel):

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, -\lambda y)$.
(b) $K = \mathbb{B} = \mathbb{Z}_2$, $V = K^n$, $\lambda \odot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.
(c) K irgend ein Körper, $V = A \times B$, A, B irgendwelche K-Vektorräume, $\lambda \odot (\vec{a}, \vec{b}) = (\lambda \odot_1 \vec{a}, \lambda \odot_2 \vec{b})$, wobei $\odot_1$ bzw. $\odot_2$ die Skalarmultiplikationen aus A bzw. B sind.

Lösung

Zu (a): Das Tripel $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \odot)$ bildet hier keinen Vektorraum, denn das Axiom V4 ist verletzt: $1 \odot (x, y) = (x, -y) \neq (x, y)$.

Zu (b): Das ist der n-dimensionale Standardraum über $\mathbb{B}$, er ist nach Satz 3.1.5 ein Vektorraum.

Zu (c): Diese Konstruktion ist wieder ein Vektorraum, wir rechnen die Axiome explizit nach:

V1:
Die Gesetze für abelsche Gruppen gelten in jeder Komponente, da $(A, +)$ bzw. $(B, +)$ jeweils abelsche Gruppen sind. Das neutrale Element der Gruppe $A \times B$ ist das Paar $(0_A, 0_B)$, wobei links das neutrale Element 0_A von $(A, +)$, und

rechts das neutrale Element $0_B \in B$ der Gruppe $(B,+)$ steht. Ist $(\vec{a},\vec{b}) \in V$ beliebig, so ist das (additive) Inverse gegeben durch $(-\vec{a},-\vec{b})$, wobei $-\vec{a}$ das Inverse von $\vec{a}$ in $(A,+)$ und $-\vec{b}$ das Inverse von $\vec{b}$ in $(B,+)$ ist. Zudem gilt $(\vec{a},\vec{b})+(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{a}+\vec{x},\vec{b}+\vec{y}) = (\vec{x}+\vec{a},\vec{y}+\vec{b}) = (\vec{x},\vec{y})+(\vec{a},\vec{b})$, daher ist $(V,+)$ als Gruppe auch abelsch.

V2/V3:

Diese Axiome gelten analog zu V1, weil sie separat in der A- und der B-Komponente eines Paars $(\vec{a},\vec{b})$ gelten. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} \lambda \odot \big((a,b)+(a',b')\big) &= \lambda \odot \big((a+a',b+b')\big) \;=\; (\lambda \odot_1 (a+a'), \lambda \odot_2 (b+b')) \\ &\underset{\text{V2 in A,B}}{=} (\lambda \odot_1 a + \lambda \odot_1 a', \lambda \odot_2 b + \lambda \odot_2 b') \;=\; (\lambda \odot_1 a, \lambda \odot_2 b) + (\lambda \odot_1 a', \lambda \odot_2 b') \\ &= \lambda \odot (a,b) + \lambda \odot (a',b')\,, \end{aligned}$$

also gilt $\lambda \odot ((a,b)+(a',b')) = \lambda \odot (a,b) + \lambda \odot (a',b')$ und damit V2 in $A \times B$.

V4:

Es sei $1 \in K$ die Eins des Körpers K. Weil $(A,K,\odot_1)$ ein Vektorraum ist gilt $1_K \odot_1 \vec{a} = \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in A$, ebenso auch $1_K \odot_2 \vec{b} = \vec{b}$ für alle $\vec{b} \in B$. Damit gilt für ein beliebiges Paar $(\vec{a},\vec{b}) \in A \times B$ das Axiom V4:

$$\lambda \odot (\vec{a},\vec{b}) \underset{\text{Def.}}{=} (\lambda \odot_1 \vec{a}, \lambda \odot_2 \vec{b}) \;=\; (\vec{a},\vec{b})\,.$$

Aufgabe 19 (Untervektorräume) — 3 Punkte

In den folgenden Beispielen ist jeweils V ein K-Vektorraum (brauchen Sie nicht zu zeigen), und $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Entscheiden Sie (mit Begründung versteht sich), ob U auch ein Untervektorraum von V ist:

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[x]$ der Raum der reellen Polynome, $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \;:\; p(x) \text{ hat Grad} \leq n\}$.
(b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$, $U = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$.
(c) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}$, $U = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$.
(d) $K = \mathbb{R}$, $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $U = \{f \in V \;:\; f(\alpha) = \beta\}$ für feste $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Achtung: Fallunterscheidung nötig).
(e) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $U = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x+y=0\big\}$.

Lösung

Zu (a):

Mit dem Unterraumkriterium kann man leicht zeigen, dass $U \subseteq V$ ein Unterraum ist, denn sind $f,g \in U$ Polynome vom Grad $\leq n$, also etwa

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad , \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

mit irgendwelchen $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ (die auch Null sein können), so ist für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \;=\; (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \cdots + (a_n+b_n)x^n$$

ebenfalls vom Grad $\leq n$, und damit ein Element von U. Nach 3.2.3 ist U damit ein Unterraum.

Zu (b):

Dieses U ist ein Unterraum, denn für $w,z \in U$ mit $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Im}(w)$ und $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ und beliebigen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Re}(\lambda w + \mu z) = \lambda \mathrm{Re}(w) + \mu \mathrm{Re}(z) = \lambda \mathrm{Im}(w) + \mu \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(\lambda w + \mu z)\,,$$

womit auch die Linearkombination $\lambda w + \mu z$ in U liegt. Nach 3.2.3 ist U ein Unterraum.

Zu (c):

Versieht man U mit der Skalarmultiplikation von $\mathbb{C}$, so geht die Unterraumeigenschaft verloren. Beispielsweise ist $1+i \in U$, aber für $\lambda = i$ ist das skalare Vielfache $\lambda(1+i) = i(1+i) = i-1$ nicht mehr in U.

Zu (d):

Für $\beta \neq 0$ ist U kein Unterraum: der Nullvektor (das ist hier die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die alles auf die Null abbildet) ist nicht enthalten, damit ist V1 verletzt, weil $(U,+)$ kein neutrales Element besitzt. Für $\beta = 0$ ist $U = \{f \in V \;:\; f(\alpha) = 0\}$ dagegen ein Unterraum wie man mit dem Unterraumkriterium 3.2.3 zeigt:

$$f,g \in U\,,\; \lambda,\mu \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; (\lambda f + \mu g)(\alpha) = \lambda f(\alpha) + \mu g(\alpha) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda f + \mu g \in U\,.$$

Zu (e):
Die Menge ist ein Unterraum, denn sind $(x,y),(x',y') \in U$, also $x+y=0$ und $x'+y'=0$, so ist für beliebige $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ auch die Linearkombination

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \end{pmatrix}$$

ein Element von U, denn es gilt $(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') = \lambda(x+y) + \mu(x'+y') = 0+0 = 0$.

Aufgabe 20 (Schnitte) 3 Punkte

Beweisen Sie Satz 3.2.10 der Vorlesung: Ist V ein K-Vektorraum und (M_λ) eine Familie von Unterräumen von V, so ist auch der Schnitt $\bigcap_\lambda M_\lambda$ ein Unterraum von V. Zeigen Sie auch, dass die Aussage für die Vereinigung falsch ist.

Lösung

Da mit den M_λ auch deren Schnitt

$$M \;=\; \bigcap_\lambda M_\lambda \;=\; \{\vec{v} \in V \;:\; \forall \lambda:\; \vec{v} \in M_\lambda\}$$

zunächst eine Untermenge des Vektorraums V ist brauchen wir nicht alle Vektorraumaxiome testen, es genügt das Unterraumkriterium 3.2.3. Dazu seien $\alpha, \beta \in K$ irgendwelche Skalare und $\vec{a}, \vec{b} \in M$ Vektoren im Schnitt. Wir müssen zeigen, dass die Linearkombination $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ ebenfalls in M liegt. Erstmal liegen $\vec{a}, \vec{b} \in M$ nach Definition des Schnitts auch in jedem M_λ. Da jedes M_λ ein Unterraum ist liegt nach Satz 3.2.3 die Kombination $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ in M_λ für jedes λ. Wieder nach Definition des Schnitts liegt sie damit in M, d. h. das Unterraumkriterium gilt auch für M und M ist ein Unterraum von V.

Für die Vereinigung wird die Aussage falsch (wir haben oben benutzt, dass die Definition des Schnitts eine Aussage über ALLE M_λ liefert, während die Vereinigung nur eine Aussage über jeweils EIN M_λ gibt). Ein einfaches Gegenbeispiel ist $V = \mathbb{R}^2$, $M_1 = \langle (1,0) \rangle$ und $M_2 = \langle (0,1) \rangle$. Die Mengen M_1 und M_2 sind jeweils Unterräume (das Unterraumkriterium wird einfach auf die erste bzw. zweite Komponente angewendet), aber die Vereinigung $M = M_1 \cup M_2$, das Koordinatenkreuz im $\mathbb{R}^2$, ist kein Unterraum: die Linearkombination $(0,1) + (1,0) = (1,1)$ liegt nicht darin.

Aufgabe 21 (Das Erzeugnis) 3 Punkte

Prüfen Sie, welche der folgenden Untermengen des $\mathbb{R}^3$ den ganzen Raum $\mathbb{R}^3$ erzeugen:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

Lösung

Es sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ irgend ein Tripel und $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, dann gilt

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \;=\; \begin{pmatrix} x+0+0 \\ 0+y+0 \\ 0+0+z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

also lässt sich jedes Tripel als Linearkombination über E darstellen. Die Menge der Linearkombinationen ist also der ganze $\mathbb{R}^3$, damit ist nach Satz 3.2.14 auch $\langle E \rangle$ der ganze $\mathbb{R}^3$.

Nun sei $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$, dann sind die Linearkombinationen von der Form

$$a\vec{a}_1 + b\vec{a}_2 + c\vec{a}_3 \;=\; \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \\ b+c \end{pmatrix} \;\stackrel{!}{=}\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wir erhalten also ein Gleichungssystem mit a,b,c als Unbestimmten. Subtraktion der zweiten von der ersten Zeile ergibt $b-c = x-y$, Addition der dritten Zeile dann $2b = x-y+z$, also $b = \frac{1}{2}(x-y+z)$. Ebenso erhält durch Zeilenoperationen

$c = \frac{1}{2}(-x+y+z)$ und $a = \frac{1}{2}(x+y-z)$. Einsetzen ergibt dann tatsächlich für beliebige $x, y, z \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$\frac{1}{2}(x+y-z)\vec{a}_1 + \frac{1}{2}(x-y+z)\vec{a}_2 + \frac{1}{2}(-x+y+z)\vec{a}_3 \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\;\;x+y-z) + \frac{1}{2}(\;\;x-y+z) \\ \frac{1}{2}(\;\;x+y-z) + \frac{1}{2}(-x+y+z) \\ \frac{1}{2}(\;\;x-y+z) + \frac{1}{2}(-x+y+z) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Damit ist jedes Tripel auch über A als Linearkombination darstellbar, also $\langle A \rangle = \mathbb{R}^3$. Nun sei $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$. Das Gleichungssystem ist nun

$$\lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \lambda_3\vec{b}_3 \;=\; \begin{pmatrix} 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 1\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 1\lambda_2 + 4\lambda_3 \end{pmatrix} \;\overset{!}{=}\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Subtraktion der ersten und zweiten Gleichung von der dritten Gleichung ergibt $-2\lambda_2 - 2\lambda_3 = z - x - y$. Subtraktion des Zweifachen der ersten von der zweiten Gleichung ergibt dagegen $-3\lambda_2 - 3\lambda_3 = y - 2x$ und damit durch Gleichsetzen die Identität $z - x - y = \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}x$ bzw. $z = \frac{5}{3}y - \frac{1}{3}x$, eine Abhängigkeit von z die es nicht geben darf, wenn $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ frei wählbar sein soll. Insbesondere wird das System beispielsweise durch die Wahl $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ unlösbar, d. h. der Vektor $(0, 0, 1)$ liegt nicht im Erzeugnis von C, damit ist es auch nicht der ganze $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 22 (Das Erzeugnis und die Summe) 2 Punkte

Es sei K ein Körper und $K[x]$ der K-Vektorraum der Polynome über K. Zeigen Sie ausführlich, dass die folgenden drei Mengen gleich sind:

- $A = \langle 1, x, x^2 \rangle$, das Erzeugnis (Definition 3.2.11) der Monome $1, x, x^2 \in K[x]$.
- $B = \langle 1 \rangle + \langle x \rangle + \langle x^2 \rangle$, die Summe (Definition 3.2.16) der Monomerzeugnisse.
- $C = \{p(x) \in V \;:\; \deg(p) \leq 2\}$, die Menge der Polynome vom Grad ≤ 2.

Lösung

Wir zeigen $A = C$ und $B = C$, woraus $A = B = C$ folgt.

$A = C$:
Nach Satz 3.2.14 ist A die Menge der Linearkombinationen aus 1, x und x^2, also

$$A \;=\; \langle 1, x, x^2 \rangle \;=\; \left\{\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 \;:\; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in K\right\} \;=\; C .$$

$B = C$:
Nach Definition der Summe von Vektorräumen ist

$$B \;=\; \langle 1 \rangle + \langle x \rangle + \langle x^2 \rangle \;=\; \left\{u_1 + u_2 + u_3 \;:\; u_1 \in \langle 1 \rangle \;,\; u_2 \in \langle x \rangle \;,\; u_3 \in \langle x^2 \rangle\right\} .$$

Andererseits gilt nach Satz 3.2.14

$$\langle 1 \rangle \;=\; \{\lambda_0 \cdot 1 \;:\; \lambda_0 \in K\} \;,\; \langle x \rangle \;=\; \{\lambda_1 x \;:\; \lambda_1 \in K\} \;,\; \langle x^2 \rangle \;=\; \left\{\lambda_2 x^2 \;:\; \lambda_2 \in K\right\}$$

und somit nach Ersetzung der u_i durch die Monome

$$B \;=\; \langle 1 \rangle + \langle x \rangle + \langle x^2 \rangle \;=\; \left\{\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 \;:\; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in K\right\} \;=\; C .$$