Skriptum zur Vorlesung

Lineare Algebra für Informatiker

Wintersemester 2007-2008

Prof. Dr. Helmut Maier
Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Daniel Haase

VORABVERSION 19. November 2007

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie
Universität Ulm

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Vorbemerkung

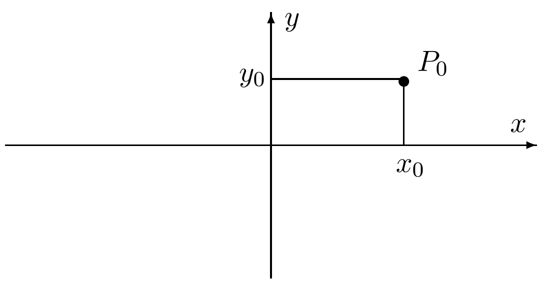
Zentral in der linearen Algebra ist der Begriff des Vektorraums: Dieser Begriff hat sich aus der analytischen Geometrie der Ebene und des Raums entwickelt, umfasst jedoch wesentlich allgemeinere Strukturen. Jedoch auch das Verständnis der allgemeineren Strukturen wird erleichtert durch die Konzepte, die auf der geometrischen Anschauung in der Ebene und im Raum beruhen.

1.1 Die Ebene

Wir setzen die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit den Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division als bekannt voraus. Unter $\mathbb{R}^2$ verstehen wir die Menge aller Paare reeller Zahlen:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Die Ebene E, die wir uns z.B. als Zeichenebene vorstellen, kann durch Einführung eines kartesischen Koordinatensystems mit dem $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden. Ein kartesisches Koordinatensystem entsteht durch Vorgabe eines Punktes 0 und einer Zahlengeraden, der x-Achse, mit dem Nullpunkt 0. Die y-Achse entsteht durch eine positive Drehung (gegen den Uhrzeigersinn) um $90°$ um den Punkt 0 aus der x-Achse. Fällt man für einen (beliebigen) Punkt $P_0 \in E$ die Lote auf die Achsen, so bestimmen die beiden Fußpunkte die x- bzw. y-Koordinate x_0 bzw. y_0 von P_0, und man schreibt $P_0 = (x_0, y_0)$.



Der Punkt $0 = (0, 0)$ heißt Nullpunkt oder Ursprung des Koordinatensystems. Nach Festlegung eines kartesischen Koordinatensystems gibt es zu jedem Zahlenpaar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau einen Punkt $X \in E$ mit $X = (x, y)$, und umgekehrt. Zu je zwei Punkten P und Q der Ebene gibt es genau eine

Parallelverschiebung (der Ebene), die P nach Q bringt. Diese Verschiebung wird mit $\overrightarrow{PQ}$ bezeichnet, und heißt „Vektor von P nach Q“. Der Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ wird dargestellt durch einen Pfeil, der von P nach Q zeigt. Wird unter $\overrightarrow{PQ}$ ein anderer Punkt R nach S verschoben, dann hat offenbar $\overrightarrow{RS}$ die gleiche Wirkung wie $\overrightarrow{PQ}$, d. h. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$. Zwei gleich lange und gleichgerichtete Pfeile im Raum stellen somit den selben Vektor dar. Offenbar gibt es zu einem Vektor $\overrightarrow{PQ}$ genau einen Punkt S, so dass $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0S}$ ist. Wir können den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ dann mit dem Punkt S der Ebene identifizieren. Jeder Punkt der Ebene kann also ein Vektor gedeutet werden und umgekehrt, insbesondere kann jeder Vektor der Ebene durch ein Zahlenpaar beschrieben werden. Wir schreiben dieses Paar als Spalte

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Die Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ heißen die Komponenten von $\vec{v}$.

Die Addition von Vektoren

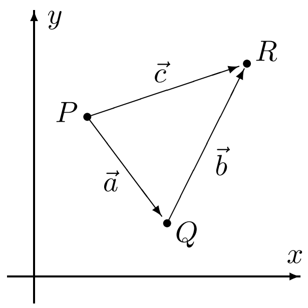
Den zu $\vec{v}$ gleichgerichteten, aber entgegengesetzten Vektor bezeichnen wir mit $-\vec{v}$ mit

$$-\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} ,$$

insbesondere ist $-\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$. Der Nullvektor ist

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$ für alle Punkte P. Führt man zwei Parallelverschiebungen, erst $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, dann $\vec{b} = \overrightarrow{QR}$, hintereinander aus, so ergibt sich wieder eine Parallelverschiebung, nämlich $\vec{c} = \overrightarrow{PR}$. Wir nennen $\vec{c}$ die Summe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und schreiben $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch ihre Komponenten gegeben, so kann die Summe durch Addition der Komponenten erhalten werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} , \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} .$$

Offenbar gelten für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{0} &= \vec{a} \ , \ \ \vec{a} + (-\vec{a}) \ = \ \vec{0} \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \quad \text{(Kommutativgesetz)} \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \ \ \text{(Assoziativgesetz)} \ . \end{aligned}$$

Die skalaren Vielfachen eines Vektors

Zu einer reellen Zahl $\lambda \geq 0$ und einem Vektor $\vec{a}$ bezeichne $\lambda\vec{a}$ denjenigen Vektor, der die selbe Richtung wie $\vec{a}$ besitzt, aber die λ-fache Länge. Im Fall $\lambda < 0$ setzt man $\lambda\vec{a} := -(|\lambda|\vec{a})$. Sonderfälle dieser Definition sind $0\vec{a} = \vec{0}$ und $\lambda\vec{0} = \vec{0}$ für jede Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und jeden Vektor $\vec{a}$. Für diese Multiplikation von Vektoren mit Zahlen (Skalarmultiplikation) gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}\lambda(\mu\vec{a}) &= (\lambda\mu)\vec{a}\\ \lambda(\vec{a}+\vec{b}) &= \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}\\ (\lambda+\mu)\vec{a} &= \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}\end{aligned}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$.

Geraden

Ein Punkt X liegt genau dann auf der Geraden g durch A in Richtung $\vec{c}$ (für $\vec{c} \neq \vec{0}$), wenn $\overrightarrow{AX}$ parallel ist zu $\vec{c}$, d. h. falls eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ gibt mit $\overrightarrow{AX} = t\vec{c}$. Man sagt, dass g die Punkt-Richtungsgleichung

$$\overrightarrow{AX} = t\vec{c}\ , \quad t \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

besitzt. Die in $(*)$ auftretende Variable t nennt man einen Parameter. Zu jedem Parameter $t = t_0$ gehört genau ein Punkt X_0 auf der Geraden g mit $\overrightarrow{AX_0} = t_0\vec{c}$, und umgekehrt. Wegen $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{PX} - \overrightarrow{PA}$ lässt sich g bezüglich eines beliebigen Punktes P darstellen durch

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PA} + t\vec{c}\ , \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Ist $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ und $C = (c_1, c_2)$, so ergibt ein Komponentenvergleich für die Geradenpunkte $X = (x, y)$ die zwei Gleichungen

$$\begin{cases} x = a_1 + tc_1 \\ y = a_2 + tc_2 \end{cases} \qquad \text{(Punkt-Richtungs-Gleichung)}$$

$$\begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \end{cases} \qquad \text{(Zwei-Punkte-Gleichung)}$$

Löst man die zwei unteren Gleichungen nach t auf, und setzt die Ausdrücke gleich, so erhält man mit $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ eine parameterfreie Darstellung.

Koordinatengleichung der Geraden durch A und B

Es ist

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \dfrac{x-a_1}{b_1-a_1} = \dfrac{y-a_2}{b_2-a_2} \text{ falls } a_i \neq b_i\ (i=1,2)\,, \\ \text{b)} & x = a_1 \text{ falls } a_1 = b_1\,, \\ \text{c)} & y = a_2 \text{ falls } a_2 = b_2\,. \end{array}$$

Aus der (parameterfreien) Zwei-Punkte-Form für g finden man über

$$t = \frac{x-a_1}{b_1-a_1} \text{ bzw. } t = \frac{y-a_2}{b_2-a_2}$$

zur Parameterform zurück.

Beispiel 1.1.1. Die durch die Parametergleichung

$$g: \begin{cases} x &= 3-2t \\ y &= 4+5t \end{cases}$$

bestimmte Gerade in der Ebene hat die Koordinatengleichung

$$\frac{3-x}{2} = \frac{y-4}{5}.$$

Beispiel 1.1.2. Man finde die Parameterdarstellung der durch die Gleichung $2x+3y=5$ gegebenen Geraden. Die Rechnung ist

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 5 \\ 2x-5 &= -3y \\ \frac{x-\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} &= \frac{y}{-\frac{1}{3}} \\ x-\frac{5}{2} &= \frac{1}{2}t \\ y &= -\frac{1}{3}t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x &= \frac{5}{2}+\frac{1}{2}t \\ y &= -\frac{1}{3}t \end{cases}. \end{aligned}$$

Schnittpunkt zweier Geraden

Die Bestimmung des Schnittpunkts zweier Geraden führt auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems, und zwar in jedem Fall, ob die Gerade nun durch die Punkt-Richtungs-Gleichung oder durch die Zwei-Punkte-Gleichung gegeben ist. Auch lineare Gleichungssysteme stehen im Zentrum der Linearen Algebra. Wir werden sie später systematisch behandeln.

Beispiel 1.1.3. Seien zwei Geraden durch Punkt-Richtungs-Gleichungen gegeben:

$$g_1: \quad \begin{cases} x &= 3+5t \\ y &= 2-t \end{cases}$$

$$g_2: \quad \begin{cases} x &= 4-2u \\ y &= 1+3u \end{cases}$$

Es ist wichtig, zwei verschiedene Variablen für die Parameter zu benützen. Gleichsetzen liefert

$$\begin{aligned} 3+5t &= 4-2u \\ 2-t &= 1+3u \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 5t+2u &= 1 \\ -t-3u &= -1\,. \end{aligned}$$

Addition des 5-fachen der 2. Zeile zur 1. Zeile ergibt

$$\begin{aligned} -13u &= -4 \\ -t-3u &= -1 \\ u &= \frac{4}{13}\,. \end{aligned}$$

Einsetzen in das System von g_2 ergibt $x=\frac{44}{13}$ und $y=\frac{25}{13}$, also erhalten wir den Schnittpunkt $(\frac{44}{13}, \frac{25}{13})$.

Sind die beiden Geraden durch Koordinatengleichungen gegeben, so erhält man das Gleichungssystem unmittelbar:

Beispiel 1.1.4. Seien $g_1 : x + 3y = 5$ und $g_2 : 3x - 2y = 7$ gegeben, dann ist

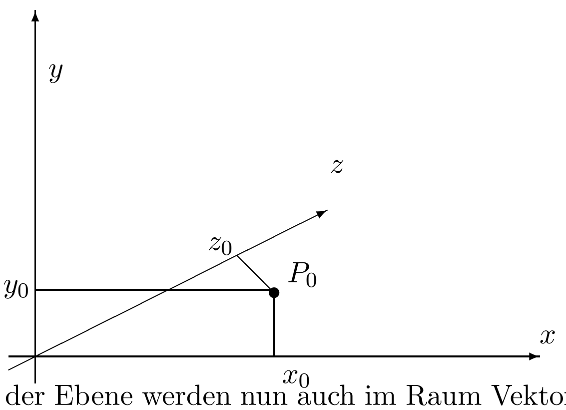
$$\begin{cases} x + 3y &= 5 \\ 3x - 2y &= 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y &= 5 \\ -11y &= -8 \end{cases}$$

nach Subtraktion des 3-fachen der ersten Zeile von der zweiten Zeile. Dies führt zu $y = \frac{8}{11}$ und $x = \frac{31}{11}$, also zu dem Schnittpunkt $P_0 = (\frac{31}{11}, \frac{8}{11})$.

Die Gleichungssysteme haben keine bzw. unendlich viele Lösungen, falls es sich um parallele bzw. identische Geraden handelt.

1.2 Der Raum

Es sei nun $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Ähnlich wie die Ebene mit dem $\mathbb{R}^2$ kann der Raum mit dem $\mathbb{R}^3$ identifiziert werden. Ein kartesisches Koordinatensystem im Raum besteht aus dem Nullpunkt 0 und drei sich in 0 schneidenden Zahlengeraden gleicher Längeneinheit. Man bezeichnet sie als x, y und z-Achse derart, dass diese Achsen ein Rechtssystem bilden, d. h. die Drehung der positiven x-Achse um 90° in die positive y-Achse, zusammen mit einer Verschiebung in Richtung der positiven z-Achse muss eine Rechtsschraube darstellen. Die drei durch je zwei Achsen bestimmten Ebenen heißen Koordinatenebenen, bzw. (x, y)-Ebene, (y, z)-Ebene und (z, x)-Ebene. Die Koordinaten x_0, y_0, z_0 eines Punktes P_0 gewinnt man aus den Schnittpunkten der entsprechenden Achsen mit dem zu den Koordinatenebenen parallelen Ebenen durch P_0. Man schreibt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.



Völlig analog zum Fall der Ebene werden nun auch im Raum Vektoren als Parallelverschiebungen des Raums definiert. Auch die Pfeildarstellung, sowie die Operationen der Addition und der Skalarmultiplikation verlaufen völlig analog zum Fall der Ebene. Der einzige Unterschied liegt in der Tatsache, dass Vektoren im Raum drei Komponenten besitzen. Wie in der Ebene besitzt eine Gerade im Raum eine Parameterdarstellung

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{x}\ ,\ t \in \mathbb{R}\ .$$

Falls $A = (a_1, a_2, a_3)$ und

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

ist, so ergibt ein Komponentenvergleich die drei Gleichungen

$$\begin{cases} x &= a_1 + tc_1 \\ y &= a_2 + tc_2 \quad \text{(Punkt-Richtungs-Gleichung)}\ . \\ z &= a_3 + tc_3 \end{cases} \tag{1}$$

Für eine Gerade durch die zwei verschiedenen Punkte $A = (a_1, a_2, a_3)$ und $B = (b_1, b_2, b_3)$ erhält man die Gleichung

$$\begin{cases} x &= a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y &= a_2 + t(b_2 - a_2) \quad \text{(Zwei-Punkte-Gleichung)}\ . \\ z &= a_3 + t(b_3 - a_3) \end{cases} \tag{2}$$

Die parameterfreien Koordinatengleichungen der Geraden durch A und B sind

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \dfrac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \dfrac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \dfrac{z - a_3}{b_3 - a_3} \ \text{falls } a_i \neq b_i \ (i = 1, 2, 3)\ , \\ \text{b)} & \dfrac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \dfrac{y - a_2}{b_2 - a_2}\ ,\ z = a_3 \ \text{falls } a_i \neq b_i \ (i = 1, 2)\ ,\ a_3 = b_3\ , \\ \text{c)} & x = a_1\ ,\ y = a_2 \ \text{falls } a_1 = b_1\ ,\ a_2 = b_2\ ,\ a_3 \neq b_3\ . \end{array}$$

Neben den Geraden sind die Ebenen wichtige Teilmengen des Raums. Wir betrachten die Ebene E mit dem „Aufpunkt“ A und den (von $\vec{0}$ verschiedenen und nicht parallelen) Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Ein Raumpunkt X liegt genau dann auf E, wenn sich der Vektor $\overrightarrow{AX}$ darstellen lässt in der Form $\overrightarrow{AX} = t\vec{u} + s\vec{v}$ mit Zahlen $t, s \in \mathbb{R}$, d. h. man hat (mit den zwei Parametern $t, s \in \mathbb{R}$) die Parameterdarstellung von E:

$$\overrightarrow{AX} = t\vec{u} + s\vec{v} \ \ (t, s \in \mathbb{R})\ . \tag{3}$$

Wird ein Kartesisches Koordinatensystem festgelegt, so dass $A = (a_1, a_2, a_3)$ und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad bzw.\ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

ist, so die Parameterdarstellung (3) äquivalent zu den 3 Koordinatengleichungen

$$\begin{cases} x &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2\ . \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3 \end{cases} \tag{4}$$

Werden $\vec{u}$ und $\vec{v}$ durch die verschiedenen Punkte $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ und $C = (c_1, c_2, c_3)$ bestimmt mit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ (d. h. $u_i = b_i - a_i$ und $v_i = c_i - a_i$), dann geht (4) über in die Drei-Punkte-Gleichung für die Ebene:

$$\begin{cases} x &= a_1 + t(b_1 - a_1) + s(c_1 - a_1) \\ y &= a_2 + t(b_2 - a_2) + s(c_2 - a_2)\ . \\ z &= a_3 + t(b_3 - a_3) + s(c_3 - a_3) \end{cases} \tag{5}$$

Kapitel 2

Grundlegende Strukturen

2.1 Mengen, Abbildungen und Verknüpfungen

Georg Cantor begründete die aus der Schule bekannte Mengenlehre mit folgender Definition:

Eine Menge ist die Zusammenfassung von Objekten,
die Gegenstand unseres Denkens sein können, zu einer Gesamtheit.

Von zentraler Bedeutung sind die Mengen

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ (Menge der natürlichen Zahlen),
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ (Menge der ganzen Zahlen),
- $\mathbb{Q}$:= Menge der rationalen Zahlen, d. h. der Brüche ganzer Zahlen,
- $\mathbb{R}$:= Menge der reellen Zahlen.

Wir nehmen in dieser Vorlesung an, dass wir wissen, was unter natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen zu verstehen ist.

Definition 2.1.1. Es seien M und N Mengen. M heißt Teilmenge von N (bzw. N Obermenge von M), falls jedes Element von M auch ein Element von N ist. Schreibweise: $M \subseteq N$ (bzw. $N \supseteq M$). Beispielsweise gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Wir schreiben zusammenfassend $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Die Verneinung dieser Relation schreibt man $M \not\subseteq N$ (M ist keine Teilmenge von N, d. h. es gibt ein Element in M, das kein Element von N ist). Die Vereinigung ist $M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$, beispielsweise $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{2, 3, 5\}$, dann ist $M \cup N = \{1, 2, 3, 5\}$. Der Durchschnitt ist $M \cap N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$, für $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{2, 3, 5\}$ gilt dann $M \cap N = \{2, 3\}$.

Definition 2.1.2. Sind M und N Mengen, so definieren wir deren Differenz durch

$$M \backslash N = \{x \in M \mid x \notin N\} .$$

Ist $\mathcal{S}$ eine Menge von Mengen (ein Mengensystem), so definieren wir die Vereinigung aller Mengen aus $\mathcal{S}$ als

$$\bigcup_{M \in \mathcal{S}} M = \{x : \text{ es gibt ein } M \in \mathcal{S} \text{ mit } x \in M\} .$$

Sind n Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ gegeben, so schreiben wir $M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$ auch als

$$\bigcup_{k=1}^{n} M_k .$$

Ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Menge M_k gegeben, so schreiben wir statt

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k \quad \text{auch} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k .$$

Eine entsprechende Schreibweise verwenden wir für den Durchschnitt:

$$\bigcap_{M \in \mathcal{S}} M = \{x : x \text{ liegt in jedem } M \in \mathcal{S}\} , \quad \bigcap_{k=1}^{n} M_k = M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n , \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k .$$

Definition 2.1.3. Es seien alle Mengen $M \in \mathcal{S}$ eines Mengensystems $\mathcal{S}$ Teilmengen einer „Universalmenge“ U. Wir bezeichnen die Komplementmenge $U \backslash M$ einer Menge $M \in \mathcal{S}$ mit M'. Mit der Schreibweise $U - M$ statt $U \backslash M$ deuten wir an, dass M eine Teilmenge von U ist.

Beispiel 2.1.4. Es sei $U = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ sowie $M = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, dann ist $U - M = M' = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

Es gelten die Komplementierungsregeln von de Morgan:

$$\left(\bigcup_{M \in \mathcal{S}} M \right)' = \bigcap_{M \in \mathcal{S}} (M') \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{M \in \mathcal{S}} M \right)' = \bigcup_{M \in \mathcal{S}} (M') ,$$

d. h. das Komplement der Vereinigung ist gleich dem Schnitt der Komplemente, und das Komplement des Schnitts ist gleich der Vereinigung der Komplemente.

Definition 2.1.5. Es seien X und Y zwei nichtleere Mengen. Unter einer Funktion oder Abbildung f von X nach Y versteht man eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet. Dieses dem Element x zugeordnete Element y bezeichnen wir mit $f(x)$ und nennen es den Wert der Funktion f an der Stelle x, oder das Bild von x unter f, während x das Urbild von $y = f(x)$ heißt. X wird die Definitionsmenge (oder auch der Definitionsbereich), Y die Zielmenge von f genannt.

Bemerkung 2.1.6. Die detaillierteste Darstellung einer Funktion geschieht in der Form

$$f : \begin{cases} X & \rightarrow & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases} .$$

Es werden also zunächst die Mengen angegeben, zwischen denen die Funktion abbildet, dann die Zuordnung der einzelnen Elemente.

Beispiel 2.1.7. Es sei

$$f : \begin{cases} [1,3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{cases}$$

diejenige Funktion, die jeder Zahl aus dem Intervall $[1,3]$ ihr Doppeltes zuordnet. Dann ist beispielsweise $f(\frac{4}{3}) = \frac{8}{3}$.

Bemerkung 2.1.8. Anstelle von f kann natürlich jedes beliebige Symbol benutzt werden. Neben der Schreibweise des Arguments in Klammern sind auch andere Notationen üblich:

(i) Das Argument im Index: a_n für $a(n)$ (gebräuchlich für Folgen),

(ii) Darstellung ohne Klammern: Fg für $F(g)$ (gebräuchlich für höhere Operatoren),

(iii) Funktionssymbol hinter dem Argument: A' für das Komplement von A.

Definition 2.1.9. Die <u>Bildmenge</u> oder schlichtweg das <u>Bild</u> einer Abbildung $f : A \to B$ ist die Menge $\mathrm{Bild}(f) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$.

Definition 2.1.10. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

(i) <u>Surjektiv</u>, falls $f(A) = B$ ist, d. h. falls es zu jedem $b \in B$ ein Urbild $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$.

(ii) <u>Injektiv</u>, falls aus $a \neq a'$ stets $f(a) \neq f(a')$ folgt, d. h. falls verschiedene Elemente aus A stets verschiedene Bilder in B besitzen.

(iii) <u>Bijektiv</u>, falls f injektiv und surjektiv ist.

Definition 2.1.11. Es seien $k \in \mathbb{N}$, $M_1, \ldots, M_k$ beliebige Mengen. Das <u>Kartesische Produkt</u> der Mengen $M_1, \ldots, M_k$ ist definiert als

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k := \{(m_1, \ldots, m_k) \mid m_j \in M_j\},$$

d. h. als die Menge aller k-<u>Tupel</u> $(m_1, \ldots, m_k)$, deren j-te <u>Komponenten</u> jeweils in M_j liegen. Ist $M_1 = M_2 = \cdots = M_k$, so schreiben wir kurz M^k.

Definition 2.1.12. Es sei $X \neq 0$ eine Menge. Eine Abbildung $X^n \to X$ heißt eine n-stellige <u>Verknüpfung</u> auf X. Unter einer Verknüpfung schlechthin verstehen wir stets eine zweistellige Verknüpfung $\circ : X \times X \to X$.

Beispiel 2.1.13. Es sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Wir haben auf $\mathbb{R}$ unter Anderem die Verknüpfungen der <u>Addition</u> und der <u>Multiplikation</u>.

Bemerkung 2.1.14. Im Falle einer endlichen Menge $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kann man $\circ$ durch eine <u>Verknüpfungstafel</u> darstellen:

$\circ$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
x_1	$x_1 \circ x_1$	$x_1 \circ x_2$	$\cdots$	$x_1 \circ x_n$
x_2	$x_2 \circ x_1$	$x_2 \circ x_2$	$\cdots$	$x_2 \circ x_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	$x_n \circ x_1$	$x_n \circ x_2$	$\cdots$	$x_n \circ x_n$

Statt $a \circ b$ schreiben wir $a \cdot b$, ab, $a + b$ usw. für die verschiedenen Verknüpfungen. Beispielsweise besitzt $X = \{-1, 0, 1\}$ mit der üblichen Multiplikation die Verknüpfungstafel

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

2.2 Gruppen

Definition 2.2.1. Es sei $\circ$ eine Verknüpfung auf einer Menge $G \neq \emptyset$. $(G, \circ)$ heißt eine Gruppe, wenn die folgenden Axiome gelten:

(G1) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz).

(G2) Es gibt mindestens ein neutrales Element $e \in G$ mit $e \circ a = a \circ e = a$ für alle $a \in G$.

(G3) Ist ein neutrales Element $e \in G$ gegeben, so gibt es zu jedem $a \in G$ ein inverses Element $a' \in G$ mit $a \circ a' = a' \circ a = e$.

Gilt zusätzlich das Axiom

(G4) $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$ (Kommutativgesetz),

so heißt G eine abelsche (oder auch kommutative Gruppe).

Beispiel 2.2.2. Es sei $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der ganzen Zahlen mit der Verknüpfung der Addition. Das Assoziativgesetz (G1) ist offenbar erfüllt: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a + b) + c = a + (b + c)$. Die Zahl 0 ist das einzige neutrale Element: $0 + a = a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$. Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ existiert ein eindeutiges Inverses, nämlich $-a$ mit $(-a) + a = 0$. Außerdem ist (G4) erfüllt: $a + b = b + a$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ ist also bzgl. der Addition eine abelsche Gruppe.

Beispiel 2.2.3. Ebenso bilden die Mengen $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen abelsche Gruppen bzgl. der Addition. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ bilden keine Gruppe bzgl. der Addition, da kein neutrales Element existiert.

Beispiel 2.2.4. Die Menge V_2 aller Vektoren in der Ebene bildet eine abelsche Gruppe bzgl. der Vektoraddition: Der Nullvektor $\vec{0}$ ist das einzige neutrale Element: $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle $a \in V_2$. Zu jedem Vektor $\vec{a}$ existiert ein eindeutig bestimmtes Inverses, nämlich $-\vec{a}$ mit $(-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ für alle $\vec{a} \in V_2$. Ebenso bildet die Menge V_3 der Vektoren im Raum eine abelsche Gruppe.

Beispiel 2.2.5. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen bildet keine Gruppe bzgl. der Verknüpfung Multiplikation. Es gibt zwar ein neutrales Element, nämlich die Zahl 1, aber es gibt für die Zahlen $a \neq \pm 1$ in $\mathbb{Z}$ kein Inverses.

Beispiel 2.2.6. Die Mengen $\mathbb{Q} - \{0\}$ und $\mathbb{R} - \{0\}$ bilden abelsche Gruppen bzgl. der Multiplikation. In beiden Fällen ist die Zahl 1 das einzige neutrale Element. Die Zahl $a \neq 0$ hat $\frac{1}{a} = a^{-1}$ als Inverses.

Beispiel 2.2.7 (Eine nicht-abelsche Gruppe). Es sei γ_3 die Menge der Permutationen von $\{1, 2, 3\}$, d. h. die Menge der bijektiven Abbildungen von $\{1, 2, 3\}$ auf sich selbst. Die Verknüpfung auf γ_3 ist die Komposition der Permutationen. Jede Permutation τ werde in der Form

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) \end{pmatrix}$$

notiert. Dann bildet γ_3 eine Gruppe mit neutralem Element

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jedes $\tau \in \gamma_3$ besitzt als Inverses seine Umkehrabbildung τ^{-1}. Die Gruppe γ_3 ist nicht abelsch: sei z. B.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} ,$$

dann ist

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{aber} \quad \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir zeigen nun unseren ersten

Satz 2.2.8. *In einer beliebigen Gruppe* $(G, \cdot)$ *gelten folgende Eigenschaften:*

(a) *Es gibt genau ein neutrales Element.*

(b) *Jedes* $a \in G$ *hat genau ein Inverses (das wir mit* a^{-1} *bezeichnen).*

Beweis. Zu a): Beweis durch Widerspruch: Angenommen es gibt verschiedene neutrale Elemente $e_1, e_2 \in G$. Da e_1 neutral ist gilt $e_1 \cdot a = a$ für alle $a \in G$, wir können also $a = e_2$ einsetzen und erhalten $e_1 \cdot e_2 = e_2$. Da auch e_2 neutral ist gilt $a \cdot e_2 = a$ für alle $a \in G$, einsetzen von $a = e_1$ ergibt $e_1 \cdot e_2 = e_1$. Zusammensetzen der beiden Gleichungen ergibt

$$e_1 \ = \ e_1 \cdot e_2 \ = \ e_2 \ ,$$

ein Widerspruch zur Annahme, dass $e_1 \neq e_2$ ist.

Zu b): Es sei $a \in G$ beliebig und $a_1, a_2 \in G$ zwei Inversen, also

$$a \cdot a_1 \ = \ a_1 \cdot a \ = \ e \ , \quad a \cdot a_2 \ = \ a_2 \cdot a \ = \ e$$

mit dem nach (a) eindeutig bestimmten neutralen Element e von G. Wir multiplizieren die zweite Gleichung von links mit a_1 und erhalten

$$a_1 \cdot (a \cdot a_2) \ = \ a_1 \cdot e \ .$$

Anwendung des Axioms (G1) ergibt die Gleichungen

$$(a_1 \cdot a) \cdot a_2 \ = \ a_1 \cdot e \ .$$

Anwendung von (G3) auf der linken Seite ergibt

$$e \cdot a_2 \ = \ a_1 \cdot e$$

und nach (G2) folgt $a_2 = a_1$, also waren die Inversen gleich. □

Bemerkung 2.2.9. Für eine multiplikativ geschriebene Gruppe nennt man das neutrale Element auch Einselement und schreibt 1 statt e. Der Multiplikationspunkt wird oft weggelassen, man schreibt also ab statt $a \cdot b$.

Wir zeigen nun ein paar Rechenregeln für Gruppen:

Satz 2.2.10. *In jeder Gruppe* $(G, \cdot)$ *gilt:*

(a) *Zu beliebigen* $a, b \in G$ *gibt es eindeutig bestimmte* $x, y \in G$ *mit* $ax = b$ *und* $ya = b$ *(nämlich* $x = a^{-1}b$ *und* $y = ba^{-1}$*).*

(b) *Es gilt* $(a^{-1})^{-1} = a$ *für alle* $a \in G$.

Beweis. Zu a): Wir müssen zeigen, dass es eine Lösung der Gleichungen $ax = b$ bzw. $ya = b$ gibt, und dass diese eindeutig bestimmt ist.

Existenz:
Einsetzen von $x = a^{-1}b$ und $y = ba^{-1}$ ergibt

$$ax = a(a^{-1})b \underset{(G1)}{=} (aa^{-1})b \underset{(G2)}{=} eb = b \ , \ \ ya = (ba^{-1})a \underset{(G1)}{=} b(a^{-1}a) \underset{(G2)}{=} be = b \, .$$

Eindeutigkeit:
Sind $x_1, x_2 \in G$ zwei Lösungen von $ax = b$, so gilt $ax_1 = b = ax_2$. Nach Multiplikation von links mit a^{-1} erhalten wir $a^{-1}ax_1 = a^{-1}ax_2$, daraus folgt mit (G3) und (G2) $x_1 = x_2$, die Lösungen waren also gleich. Die Rechnung für die Lösungen von $ya = b$ verläuft analog.

Zu b): Nach (G3) ist $\tilde{a} = (a^{-1})^{-1}$ ein Element aus G mit der Eigenschaft $\tilde{a} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot \tilde{a} = e$. Auch a erfüllt diese Eigenschaft wegen (G2). Nach Satz 2.2.8(b) ist $a = \tilde{a} = (a^{-1})^{-1}$. □

Satz 2.2.11. *Für endlich viele Elemente* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ *gilt* $(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdots a_1^{-1}$.

Beweis. Diese Aussage beweisen wir durch vollständige Induktion über n: Der Induktionsanfang ist $n = 1$: für nur ein einziges Element ist die Aussage $a_1^{-1} = a_1^{-1}$ richtig. Die Induktionsannahme ist, dass für ein beliebiges $n \geq 1$ die Aussage $(a_1 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$ gilt. Der Induktionsschritt besteht darin, dass wir die Aussage für $n+1$ zeigen, indem wir die Induktionsannahme für n verwenden. Die Aussage für n lautet, dass die rechte Seite des Satzes das Axiom (G3) erfüllt, also gilt

$$(a_1 \cdots a_n) \cdot (a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}) \ = \ e \, .$$

Nach (G2) dürfen wir e in der Mitte einfügen ohne den Wert der linken Seite zu ändern:

$$(a_1 \cdots a_n) \cdot e \cdot (a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}) \ = \ e \, .$$

Nach (G3) können wir e durch $a_{n+1}a_{n+1}^{-1}$ ersetzen, und erhalten

$$(a_1 \cdots a_n) \cdot (a_{n+1}a_{n+1}^{-1}) \cdot (a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}) \ = \ e \, .$$

Wegen (G1) dürfen wir die Klammen umsetzen zu

$$(a_1 \cdots a_n \cdot a_{n+1}) \cdot (a_{n+1}^{-1} \cdot a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}) \ = \ e \, .$$

Damit ist die rechte Klammer das Inverse der linken Klammer nach (G3). Das ist die gewünschte Aussage für $n+1$. Damit haben wir die Induktion abgeschlossen, und der Satz gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Insbesondere ist die aus der Schule bekannte Regel $(a_1 \cdots a_n)^{-1} = a_1^{-1} \cdots a_n^{-1}$ nur in abelschen Gruppen richtig!

Bemerkung 2.2.12. Für eine additive geschriebene Gruppe $(G, +)$ ändern sich die Bezeichnungen und die Rechenregeln folgendermaßen:

1. Man schreibt „0" für das neutrale Element, und nennt es das Nullelement von $(G, +)$. Es gilt $a + 0 = 0 + a = a$ für alle $a \in G$.

2. Man schreibt $-a$ für das Inverse statt a^{-1} und $a-b$ als Abkürzung für $a+(-b)$. Es gilt somit $a-a=-a+a=a+(-a)=0$ für alle $a \in G$.

3. Die Gleichungen $a+x=b$ und $y+a=b$ sind eindeutig lösbar mit $x=-a+b$ und $y=b-a$.

4. Es gilt $-(-a)=a$ und $-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=-a_n-a_{n-1}-\cdots-a_1=(-a_n)+(-a_{n-1})+\cdots+(-a_1)$.

Üblicherweise benützt man die additive Schreibweise nur für abelsche Gruppen.

2.3 Ringe und Körper

Definition 2.3.1. Es seien $+$ und $\cdot$ zwei Verknüpfungen auf einer Menge $M \neq \emptyset$. Das Tripel $(R,+,\cdot)$ heißt Ring, wenn gilt:

(R1) $(R,+)$ ist eine abelsche Gruppe, ihr Nullelement schreiben wir 0.

(R2) Für alle $a,b,c \in R$ ist $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ (Assoziativgesetz für $\cdot$).

(R3) Es gelten die Distributivgesetze:

$$a\cdot(b+c) \;=\; (a\cdot b)+(a\cdot c) \;\text{ und }\; (b+c)\cdot a \;=\; (b\cdot a)+(c\cdot a)\,.$$

Gilt außerdem

(R4) Für alle $a,b \in R$ ist $a\cdot b=b\cdot a$ (Kommutativgesetz),

so heißt R ein kommutativer Ring. Gibt es ein $e \in R$ mit $e\cdot a=a\cdot e=a$ für alle $a \in R$, so heißt R ein Ring mit Eins, und wir schreiben 1 statt e.

Bemerkung 2.3.2. Wir vereinbaren die „Punkt-vor-Strich"-Regel, d. h. der Ausdruck $a+bc$ ist eine Abkürzung für $a+(b\cdot c)$.

Satz 2.3.3. *In einem Ring R gilt für alle $a,b \in \mathbb{R}$:*

$$a\cdot 0=0\cdot a=0 \;\;,\;\; a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-(a\cdot b) \;\;,\;\; (-a)\cdot(-b)=a\cdot b\,.$$

Es gelten also die von den gewöhnlichen Zahlensystemen her bekannten Rechenregeln.

Beweis. Zu a): Es gilt

$$a\cdot 0 \;=\; a\cdot(0+0) \underset{\text{(R3)}}{=} a\cdot 0+a\cdot 0\,.$$

Subtraktion von $a\cdot 0$ auf beiden Seiten ergibt $0=a\cdot 0$.

Zu b): Es gilt

$$ab+a(-b) \underset{\text{(R3)}}{=} a\cdot(b+(-b)) \;=\; a\cdot 0 \underset{\text{(a)}}{=} 0\,.$$

Also gilt $a(-b)=-ab$. Der Beweis für $(-a)b=-ab$ ist analog.

Zu c): Es gilt

$$(-a)(-b) \underset{\text{(b)}}{=} -(-a)b \underset{\text{(b)}}{=} -(-ab) \;=\; ab\,.$$

□

Definition 2.3.4. Ein Ring $(K,+,\cdot)$ heißt Körper, wenn $(K-\{0\},\cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

In einem Körper schreibt man oft

$$ab^{-1} \;=\; b^{-1}a \;=\; \frac{a}{b} \quad , \quad a,b\in K\ ,\ b\neq 0\,.$$

Beispiel 2.3.5. Die Mengen $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind Körper bzgl. der vertrauten Addition und Multiplikation.

Beispiel 2.3.6. Die Menge $K=\{0,1\}$ bildet mit den Verknüpfungen

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

einen Körper. In ihm gilt $1+1=0$.

Beispiel 2.3.7. Die Menge $K=\{0,1,a\}$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & 1 & a \\ \hline 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a & a & 0 & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & 1 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & a & 1 \end{array}$$

bildet einen Körper. Hier gilt $1+1+1=0$.

Beispiel 2.3.8. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen bildet bzgl. der Addition und Multiplikation einen Ring, jedoch keinen Körper.

2.4 Der Körper der komplexen Zahlen

Definition 2.4.1. Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist identisch mit $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\ :\ x,y\in\mathbb{R}\}$. Die Addition wird komponentenweise erklärt:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) \;=\; (x_1+x_2,y_1+y_2) \ \text{ für } (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{C}\,.$$

Die Multiplikation wird definiert durch

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) \;=\; (x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)\,.$$

$\mathbb{C}$ enthält den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, wenn man $x\in\mathbb{R}$ mit $(x,0)\in\mathbb{C}$ identifiziert. Diese Definitionen sind transparenter, wenn wir folgende Notation einführen:

Definition 2.4.2. Wir schreiben $(0,1)=i$ (die imaginäre Einheit). Jedes $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ kann dann geschrieben werden als $z=x+iy$. Man nennt x den Realteil von z, und y den Imaginärteil, und schreibt $x=\mathrm{Re}(z)$ sowie $y=\mathrm{Im}(z)$.

Die Definition der Multiplikation folgt nun einfach aus den beiden Regeln

1. $i^2=-1$ (keine reelle Zahl erfüllt diese Eigenschaft),

2. Distributiv-, Kommutativ- und Assoziativgesetze wie in einem Ring.

Dann gilt

$$(x+iy)(u+iv) \underset{(R3)}{=} x(u+iv)+iy(u+iv) \underset{(R3)}{=} xu+ixv+iyu+(iy)(iu) \underset{1.}{=} (xu-yu)+i(xv+yu)\,.$$

Satz 2.4.3. $(\mathbb{C},+,\cdot)$ *bildet einen Körper.*

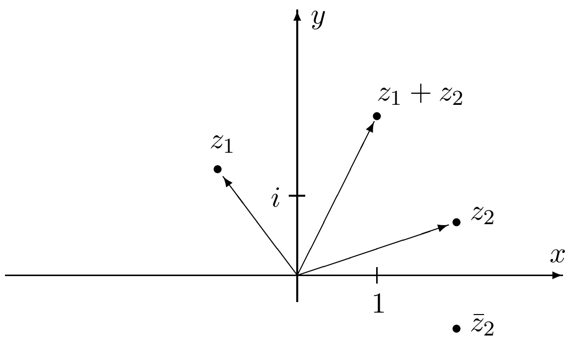
Beweis. Man prüft leicht die Gültigkeit der Körperaxiome. Zum Nachweis der Inversen verwendet man die Regeln

$$-(x+yi) = -x+(-yi) \ \ , \ \ (x+yi)^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \ \text{falls } x+iy \neq 0\,.$$

□

Da die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit dem $\mathbb{R}^2$ identisch ist, ergibt sich die Möglichkeit der Darstellung in einer mit einem Kartesischen Koordinatensystem versehenen Ebene. Die Zahl $x+iy$ identifizieren wir mit dem Punkt (x,y) oder auch mit dem Vektor $\binom{x}{y}$. Die Addition von komplexen Zahlen entspricht dann der Vektoraddition.

Definition 2.4.4. Ist $z = x+iy \in \mathbb{C}$ so nennt man $\bar{z} = x-iy$ die zu z konjugiert komplexe Zahl. Geometrisch gesehen ist $\bar{z}$ das Spiegelbild von z bzgl. der reellen Achse.



Satz 2.4.5. *Es seien $z,w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen, dann gilt*

(a) *Es ist $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$.*

(b) *Es ist $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$, sowie*

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

falls $w \neq 0$ ist.

(c) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ *und* $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$. *Insbesondere gilt $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Übungsaufgabe. □

Definition 2.4.6. Ist $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so nennt man die nicht-negative reelle Zahl

$$|z| \;=\; \sqrt{x^2 + y^2}$$

den Absolutbetrag von z. Geometrisch ist $|z|$ der Abstand von z zum Ursprung bzw. die Länge des Vektors z.

Satz 2.4.7. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} \;\;,\;\; |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \;\;,\;\; \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \text{ (für } w \neq 0\text{)} \;\;,\;\; |\bar{z}| = |z|$$

sowie die Dreiecksungleichung

$$|w + z| \;\leq\; |w| + |z| \,.$$

Beweis. Durch Nachrechnen. □

Ursprünglich wurden die komplexen Zahlen zur einheitlichen Behandlung von quadratischen Gleichungen

$$az^2 + bz + c \;=\; 0 \quad , \quad (a, b, c \in \mathbb{R} \,,\; a \neq 0) \qquad (*)$$

eingeführt. Die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ hat offenbar in $\mathbb{R}$ keine Lösung, wohl aber $\mathbb{C}$, nämlich $z = \pm\sqrt{-1} = \pm i$, und es gilt $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$. Allgemein gilt: Die Gleichung $(*)$ hat die in $\mathbb{C}$ stets die beiden (nicht notwendig verschiedenen) Lösungen

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \;\;,\;\; z_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \,,$$

wobei $\sqrt{d}$ die positive Quadratwurzel von $d \in \mathbb{R}$ bezeichnet, wenn $d \geq 0$ ist, und $\sqrt{d} = i \cdot \sqrt{-d}$ falls $d < 0$ ist. Ferner bestätigt man leicht durch Nachrechnen die Gleichung

$$az^2 + bz + c \;=\; a(z - z_1)(z - z_2) \,.$$

Kapitel 3

Vektorräume

3.1 Der Begriff des Vektorraums

Sei V die Menge der Vektoren der Ebene oder des Raums. Diese Menge, zusammen mit den Operationen der Addition und Skalarmultiplikation hat die folgenden Eigenschaften:

1. $(V, +)$ bildet eine abelsche Gruppe.
2. Es gilt $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} \in V$ sowie $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{u}, \vec{v} \in V$ (Distributivgesetze).
3. Es gilt $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$ (Assoziativgesetz).
4. Es gilt $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

Die Gesetze 1-4 dienen nun zur Definition der allgemeinen Struktur des Vektorraums. Ein größerer Grad an Allgemeinheit wird noch erzielt, indem der zur Skalarmultiplikation verwendete Körper $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen Körper K ersetzt wird.

Definition 3.1.1. Es sei V eine Menge mit einer Verknüpfung $\oplus$ und $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit Null 0 und Eins 1, sowie $\circ : K \times V \to V$ eine Abbildung. Das Tripel $(V, K, \circ)$ heißt ein <u>Vektorraum über K</u> (oder kurz VR), auch <u>linearer Raum</u>, wenn die folgenden Axiome für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und $\mu, \lambda \in K$ gelten:

(V1) $(V, \oplus)$ bildet eine abelsche Gruppe.

(V2) $(\lambda + \mu) \circ \vec{u} = (\lambda \circ \vec{u}) \oplus (\mu \circ \vec{u})$ sowie $\lambda \circ (\vec{u} \oplus \vec{v}) = (\lambda \circ \vec{u}) \oplus (\lambda \circ \vec{v})$ (Distributivgesetze).

(V3) $\lambda \circ (\mu \circ \vec{u}) = (\lambda \cdot \mu) \circ \vec{u}$ (Assoziativgesetz).

(V4) $1 \circ \vec{u} = \vec{u}$.

Die Elemente von V heißen <u>Vektoren</u>, die von K <u>Skalare</u>. K heißt der <u>Skalarkörper</u> des Vektorraums, die Verknüpfung $\circ$ nennt man die <u>äußere Multiplikation</u> von Vektoren mit Skalaren, die Operationen $\oplus$ und $\circ$ nennt man auch <u>lineare Operationen</u>.

Statt $(V, K, \circ)$ nennt man meist kurz V einen VR, wenn aus dem Zusammenhang Klarheit über K und $\circ$ besteht. In den wichtigen Fällen $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ spricht man auch von einem <u>reellen</u> bzw. <u>komplexen</u> Vektorraum.

Bemerkung 3.1.2. In der Vorlesung bezeichnen wir Vektoren mit einem Pfeil: $\vec{v}$, und schreiben $\vec{0}$ für das Nullelement der abelschen Gruppe $(V, \oplus)$, genannt <u>Nullvektor</u>. In der Literatur gebräuchlich sind auch die altdeutschen Buchstaben $\mathfrak{u}$, Unterstriche $\underline{u}$ oder Fettdruck **u** um Vektoren von Skalaren zu unterscheiden. Sobald wir mit dem Sachverhalt vertraut sind schreiben wir statt $\oplus$ und $\circ$ einfach $+$ und $\cdot$.

Wir stellen einige einfache Rechenregeln zusammen:

Satz 3.1.3. *In einem VR $(V, K, \circ)$ gilt für $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in K$:*

(a) $\lambda \circ \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda = 0 \textit{ oder } \vec{v} = \vec{0})$.

(b) $(-\lambda) \circ \vec{v} = \lambda \circ (\ominus \vec{v}) = \ominus(\lambda \circ \vec{v})$, *wobei $\ominus$ die Inversion in $(V, \oplus)$ ist.*

(c) $(\lambda - \mu) \circ \vec{v} = \lambda \circ \vec{v} \ominus \mu \circ \vec{v}$ *sowie* $\lambda \circ (\vec{v} \ominus \vec{w}) = \lambda \circ \vec{v} \ominus \lambda \circ \vec{w}$.

Beweis. Zu a): Zur Richtung „$\Leftarrow$“:

$$\lambda = 0: \ 0 \circ \vec{v} = (0 + 0) \circ \vec{v} \underset{(V2)}{=} 0 \circ v \oplus 0 \circ \vec{v} \,.$$

Kürzen nach Satz 2.2.10 in der Gruppe $(V, \oplus)$ ergibt $0 \circ \vec{v} = \vec{0}$. Andererseits gilt

$$\vec{v} = \vec{0}: \ \lambda \circ \vec{0} = \lambda \circ (\vec{0} \oplus \vec{0}) \underset{(V2)}{=} \lambda \circ \vec{0} \oplus \lambda \circ \vec{0} \,.$$

Kürzen ergibt $\lambda \circ \vec{0} = \vec{0}$. Nun zur Richtung „$\Rightarrow$“: Es sei $\lambda \circ \vec{v} = \vec{0}$. Ist $\lambda = 0$, so sind wir fertig. Ist $\lambda \neq 0$, so existiert λ^{-1} im Körper K. Es folgt

$$\vec{v} \underset{(V4)}{=} 1 \circ \vec{v} = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \circ \vec{v} \underset{(V3)}{=} \lambda^{-1} \circ (\lambda \circ \vec{v}) = \lambda^{-1} \circ \vec{0} = \vec{0} \,.$$

Zu b): Es gilt

$$\lambda \circ \vec{v} \oplus (-\lambda) \circ \vec{v} \underset{(V2)}{=} (\lambda - \lambda) \circ \vec{v} = 0 \circ \vec{v} \underset{(a)}{=} \vec{0} \,,$$

also $(-\lambda) \circ \vec{v} = \ominus(\lambda \circ \vec{v})$. Ebenso folgt aus

$$\lambda \circ \vec{v} \oplus \lambda \circ (\ominus \vec{v}) \underset{(V2)}{=} \lambda \circ (\vec{v} \ominus \vec{v}) = \lambda \circ \vec{0} \underset{(a)}{=} \vec{0}$$

die Gleichung $\lambda \circ (\ominus \vec{v}) = \ominus(\lambda \circ \vec{v})$.

Zu c): das folgt sofort aus (V2) und (b). □

Beispiel 3.1.4. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$V = K^n = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_1, \ldots, x_n \in K\} \,.$$

Für $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ aus K^n und $\lambda \in K$ definieren wir

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \ \ , \ \ \lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \,,$$

und nennen K^n den n-dimensionalen <u>Standardraum</u> über dem Körper K.

Satz 3.1.5. $(K^n, K, \cdot)$ *ist ein Vektorraum.*

Beweis. Wir haben zunächst zu beweisen, dass $(K^n, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Die Gesetze einer abelschen Gruppe gelten alle, da sie für jede Komponente gelten. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned}(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= ((x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n))+(z_1,\ldots,z_n)\\ &= (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)+(z_1,\ldots,z_n)\\ &= ((x_1+y_1)+z_1,\ldots,(x_n+y_n)+z_n)\\ &= (x_1,\ldots,x_n)+(y_1+z_1,\ldots,y_n+z_n)\\ &= (x_1,\ldots,x_n)+((y_1,\ldots,y_n)+(z_1,\ldots,z_n)) \;=\; \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})\,.\end{aligned}$$

Das Nullelement von K^n ist $\vec{0} = (0,\ldots,0)$, und zu $(x_1,\ldots,x_n)$ ist $(-x_1,\ldots,-x_n)$ das Inverse. Auch die Gesetze (V2)-(V4) beweist man durch Betrachtung der Komponenten. □

Beispiel 3.1.6. Sei F die Menge der auf dem Intervall $[0,1]$ definierten reellwertigen Funktionen: $F = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$. Für $f, g \in F$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ werden $f+g$ und $\lambda \cdot f$ erklärt durch

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad , \quad (\lambda\cdot f)(x) = \lambda\cdot f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Dann ist - wie man leicht sieht - $(F, \mathbb{R}, \cdot)$ ein Vektorraum.

Beispiel 3.1.7. Es sei der Körper $(K, +, \cdot)$ enthalten im Körper $(L, +, \cdot)$. Auf L betrachten wir die gewöhnliche Addition während wir für die Skalarmultiplikation nur Produkte $\lambda \cdot x$ für $\lambda \in K$ und $x \in L$ betrachten. Dann ist $(L, K, \cdot)$ ein Vektorraum. Zum Beispiel ist der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Beispiel 3.1.8. Es sei wiederum der Körper $(K, +, \cdot)$ enthalten im Körper $(L, +, \cdot)$. Jeder Vektorraum V über L kann dann auch als Vektorraum über K betrachtet werden. Man braucht lediglich die Skalarmultiplikation auf Skalare aus K zu beschränken. Insbesondere kann jeder komplexe Vektorraum auch als reeller Vektorraum angesehen werden.

3.2 Unterräume

Definition 3.2.1. Eine Teilmenge U eines VR V über K heißt <u>Unterraum</u> oder <u>Teilraum</u>, von V, wenn U bzgl. der in V gegebenen Operationen selbst ein Vektorraum über K ist.

Um nachzuweisen, dass $U \subseteq V$ ein Unterraum von V ist, braucht man nicht alle VR-Axiome nachzuprüfen, vielmehr gilt

Satz 3.2.2. *Es sei $U \neq \emptyset$ eine Teilmenge des VR V über K. Genau dann ist U ein Unterraum von V, wenn gilt:*

(U1) $\vec{v}, \vec{w} \in U \Rightarrow \vec{v}+\vec{w} \in U$ *(Abgeschlossenheit der Addition).*

(U2) $\vec{v} \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda\vec{v} \in U$ *(Abgeschlossenheit der Skalarmultiplikation).*

Beweis. Ist U ein Unterraum, so gelten (U1) und (U2) offensichtlich. Umgekehrt mögen (U1),(U2) für eine Teilmenge $U \subseteq V$ gelten. Wegen (U1) ist $+$ wirklich eine Verknüpfung auf U. Da Assoziativ- und Kommutativgesetz in V gelten, gelten sie erst recht in U. Da $U \neq \emptyset$ gibt es mindestens ein $\vec{v}_0 \in U$. Mit (U2) folgt $0 \cdot \vec{v}_0 = \vec{0} \in U$. Nach (U2) gilt auch $\vec{v} \in U \Rightarrow -\vec{v} = (-1)\cdot\vec{v} \in U$. Also ist $(U, +)$ eine abelsche Gruppe. Wegen (U2) ist die Skalarmultiplikation auf U definiert, außerdem gelten (V2)-(V4) in V, also erst recht in U. Damit ist U ein Vektorraum. □

Die Bedingungen (U1) und (U2) lassen sich zu einer zusammenfassen:

Satz 3.2.3 (Unterraumkriterium). *Eine Teilmenge $U \neq \emptyset$ eines VR V über K ist genau dann ein Unterraum von V, wenn gilt:*

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in U,\ \lambda, \mu \in K :\ \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \in U\ . \tag{$*$}$$

Beweis. Ist U ein Unterraum, so gilt $(*)$ offensichtlich. Nun gelte $(*)$, dann folgen (U1) und (U2) durch die Wahlen $\lambda = \mu = 1$ bzw. $\mu = 0$. □

Beispiel 3.2.4. Jeder Vektorraum V besitzt die Unterräume $\{\vec{0}\}$ („Nullraum"), und V selbst. Die leere Teilmenge $\emptyset$ ist kein Unterraum.

Beispiel 3.2.5. Sei V_2 der Vektorraum der Vektoren der Ebene. Unterräume von V_2 sind $\{\vec{0}\}$, V_2 selbst, und für jedes $\vec{v} \in V_2 - \{\vec{0}\}$ die Menge $\{\lambda\vec{v}\ :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, d. h. die Menge der Richtungsvektoren einer Geraden.

Beispiel 3.2.6. Sei V_3 der Vektorraum der Vektoren des Raums. Unterräume sind analog zum V_2 die Mengen $\{\vec{0}\}$, V_3 und für jedes $\vec{v} \in V_3 - \{\vec{0}\}$ die Menge $\{\lambda\vec{v}\ :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Außerdem bildet für jedes Paar nicht-paralleler Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ die Menge $\{\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}\ :\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ einen Unterraum, d. h. die Menge der Richtungsvektoren einer Ebene.

Beispiel 3.2.7. Der Standardraum $\mathbb{R}^2$ enthält die Unterräume $\{\vec{0}\}$, $\mathbb{R}^2$ selbst, sowie für jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ die Menge $\{\lambda\vec{v}\ :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, d. h. die Geraden durch den Nullpunkt.

Beispiel 3.2.8. Der Standardraum $\mathbb{R}^3$ enthält die Unterräume $\{\vec{0}\}$, $\mathbb{R}^3$ selbst, sowie sämtliche Geraden und Ebenen durch den Nullpunkt.

Beispiel 3.2.9. Es sei $K = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen aus Beispiel 2.3.6. Ein Beispiel eines Unterraums U von des Standardraums K^n ist die Menge aller n-Tupel mit einer geraden Anzahl von Einsen, man sagt mit gerader Parität. Diese kann wegen $1 + 1 = 0$ in K auch über

$$U\ =\ \{\vec{x} \in K^n\ :\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

definiert werden. Solche Unterräume spielen bei der Nachrichtenübertragung eine Rolle: Jedes Stück Information wird durch eine Kette von Nullen und Einsen codiert. Damit Fehler bei der Übermittlung nicht unerkannt bleiben, kann man sich entscheiden, nur Ketten gerader Parität zu verwenden. Auch andere Unterräume von K^n spielen in der Codierungstheorie eine große Rolle.

Satz 3.2.10. *Der Durchschnitt beliebig vieler Unterräume einer VR ist wieder ein Unterraum von V.*

Beweis: Übungsaufgabe. □

Definition 3.2.11. Für eine beliebige Teilmenge M eines VR V heißt

$$\langle\, M\, \rangle\ :=\ \bigcap \{U\ :\ M \subseteq U\ ,\ U \text{ Unterraum von } V\}$$

der von M erzeugte oder aufgespannte Unterraum, oder die lineare Hülle von M. Man nennt M auch ein Erzeugendensystem und $\langle\, M\, \rangle$ das Erzeugnis. Im Falle einer endlichen Menge $M = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ schreibt man auch $\langle\, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\, \rangle$ statt $\langle\, \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}\, \rangle$.

Beispiel 3.2.12. Das Erzeugnis der leeren Menge $\emptyset$ ist der Nullraum $\{\vec{0}\}$.

Definition 3.2.13. Es sei V ein VR über K und $\vec{v}_1, \dots, v_k \in V$. Jede Summe der Form

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k$$

mit Skalaren $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ heißt eine Linearkombination von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. λ_j heißt der Koeffizient von $\vec{v}_j$ $(j = 1 \dots k)$ in der Summe.

Nach dem Unterraumkriterium liegt jede Linearkombination der Länge $k = 2$ in V, per Induktion sieht man, dass auch Linearkombinationen beliebiger Länge aus V wieder in V liegen. Mithilfe des Begriffs der Linearkombination lässt sich die lineare Hülle $\langle\, M \,\rangle$ einer Menge M viel einfacher beschreiben:

Satz 3.2.14. *Es sei V ein VR über K, $M \subseteq V$ mit $M \neq \emptyset$. Dann ist $\langle\, M \,\rangle$ gleich der Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus M mit Koeffizienten aus K:*

$$\langle\, M \,\rangle \;=\; \{\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k \;:\; k \in \mathbb{N}\,,\; \vec{v}_j \in M\,,\; \lambda_j \in K\,,\; j = 1 \dots k\}\,.$$

Beweis. Bezeichnen wir die Menge der Linearkombinationen mit $L(M)$, so gilt

$$L(M) \;\subseteq\; \langle\, M \,\rangle\;, \tag{1}$$

da jeder über M liegende Unterraum von V jede Linearkombination über M enthält. Andererseits zeigt man mit Satz 3.2.3 leicht, dass $L(M)$ ein Unterraum von V ist: sind nämlich

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k \in L(M) \;\;,\;\; \vec{w} = \mu_1\vec{w}_1 + \cdots + \mu_m\vec{w}_m \in L(M)$$

mit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m \in M$, so gilt auch

$$\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} = \lambda\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda\lambda_k\vec{v}_k + \mu\mu_1\vec{w}_1 + \cdots + \mu\mu_m\vec{w}_m \in L(M)$$

für alle $\lambda, \mu \in K$. Da $\langle\, M \,\rangle$ nach Definition in jedem Unterraum von V enthalten ist, der M enthält, folgt

$$\langle\, M \,\rangle \;\subseteq\; L(M)\,. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung des Satzes. □

Beispiel 3.2.15. Falls M nur aus ein oder zwei Elementen besteht, und es sich bei V um den $\mathbb{R}^2$ oder den $\mathbb{R}^3$ handelt, so hat $\langle\, M \,\rangle$ eine einfache geometrische Bedeutung: Ist $M = \{\vec{v}_1\}$ mit $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, so ist nach Satz 3.2.14 $\langle\, M \,\rangle = \{\lambda\vec{v}_1 \;:\; \lambda \in \mathbb{R}\}$, die Gerade durch den Nullpunkt, die $\vec{v}_1$ enthält. Ist $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, so ist $\langle\, M \,\rangle = \{\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 \;:\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ die Ebene durch den Nullpunkt, die $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ enthält (falls $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ nicht zueinander parallel sind).

Definition 3.2.16. Es seien $U_1, \dots, U_k$ Unterräume des VR V, dann heißt

$$U_1 + \cdots + U_k \;:=\; \{\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_k \;:\; u_j \in U_j\}$$

die Summe von $U_1, \dots, U_k$.

Satz 3.2.17. *Die Summe $U_1 + \cdots + U_k$ ist ein Unterraum von V.*

Beweis. Es ist $U_1 + \cdots + U_k \neq \emptyset$ wegen $\vec{0} = \vec{0} + \cdots + \vec{0} \in U_1 + \cdots + U_k$. Es seien

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_k \;\;,\;\; \vec{w} = \vec{w}_1 + \cdots + \vec{w}_k$$

beliebig aus der Summe, und $\lambda, \mu \in K$., dann ist auch

$$\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} = \underbrace{(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{w}_1)}_{\in U_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda\vec{v}_k + \mu\vec{w}_k)}_{\in U_k}$$

ein Vektor aus der Summe. Mit Satz 3.2.3 folgt die Behauptung. □

3.3 Lineare Abhängigkeit, Basis, Dimension

Es sei V stets ein VR über dem Körper K.

Definition 3.3.1. Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ heißen linear abhängig (kurz l.a.), wenn es $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ gibt, so dass

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k \;=\; \vec{0} \;\text{ und }\; (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0)$$

gilt. Andernfalls, d. h. wenn für $\lambda_j \in K$ stets

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

gilt, heißen $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ linear unabhängig (kurz l.u.).

Beispiel 3.3.2. Für $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 = (1,2,0)$, $\vec{v}_2 = (0,3,2)$, $\vec{v}_3 = (1,0,0)$ und $\vec{v}_4 = (3,2,0)$ sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4$ linear abhängig, denn es gilt $1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + 2 \cdot \vec{v}_3 + (-1) \cdot \vec{v}_4 = \vec{0}$. Die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_3$ sind dagegen linear unabhängig, denn aus $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$ folgt

$$\begin{cases} \lambda_1 & & + \;\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & + \;3\lambda_2 & & = 0 \\ & \;\;2\lambda_2 & & = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_3 = 0\,.$$

Beispiel 3.3.3. Im K^n sind $\vec{e}_1 = (1,0,\dots,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0)$,...,$\vec{e}_n = (0,\dots,0,1)$ stets linear unabhängig.

Beispiel 3.3.4. Im $\mathbb{R}^3$ hat die lineare Abhängigkeit von 2 bzw. 3 Vektoren eine anschauliche geometrische Bedeutung: sind $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear abhängig, so gilt $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$ mit $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$. Sei o.B.d.A. $\lambda_2 \neq 0$. Es folgt $\vec{v}_2 = -\lambda_2^{-1} \lambda_1 \vec{v}_1$, d. h. die beiden Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ liegen auf einer Geraden durch den Nullpunkt. Ähnlich bedeutet im $\mathbb{R}^3$ die lineare Abhängigkeit zweier Vektoren deren Parallelität. Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear abhängig, so gilt $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$ mit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$. Sei o.B.d.A. $\lambda_3 \neq 0$, dann folgt $\vec{v}_3 = -\lambda_3^{-1} \lambda_1 \vec{v}_1 - \lambda_3^{-1} \lambda_2 \vec{v}_2$, d. h. die drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ liegen auf einer Ebene durch den Nullpunkt.

Satz 3.3.5. *Es gilt:*

(a) *Die Menge $\{\vec{0}\}$ ist stets l.a., ein einzelner Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist stets l.u.*

(b) *Mit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sind auch $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \dots, \vec{v}_l$ $(l \geq k)$ l.a.*

(c) *Sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ l.u., so auch $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ für $1 \leq m \leq k$.*

(d) *Ist $\vec{v}$ Linearkombination von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$, so sind $v_1, \dots, v_k, \vec{v}$ l.a.*

(e) *Sind $k \geq 2$ Vektoren l.a., so ist wenigstens einer von ihnen eine Linearkombination der anderen.*

(f) *Sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ l.u., aber $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}$ l.a., so ist $\vec{v}$ eine Linearkombination der $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$.*

Beweis. Zu a): Es gilt $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$, also ist $\{\vec{0}\}$ l.a., andererseits folgt aus $\lambda \vec{v} = \vec{0}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$, dass $\lambda = 0$ ist, also ist $\{\vec{v}\}$ l.u. nach Satz 3.1.3(a).

Zu b): Aus $\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$ und $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0)$ folgt auch

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k + \lambda_{k+1} \vec{v}_{k+1} + \cdots + \lambda_l \vec{v}_l \;=\; \vec{0}\;,\quad (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \neq (0, \dots, 0)$$

wenn man $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_l = 0$ einsetzt.

Zu c): Wären $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ l.a., so nach (b) auch $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$.

Zu d): Ist $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k$, so folgt $\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k + (-1)\vec{v} = \vec{0}$.

Zu e): Es sei $\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$ und $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0)$. Nach eventueller Umnummerierung können wir annehmen, dass $\lambda_k \neq 0$ ist, dann folgt $\vec{v}_k = (-\lambda_k^{-1})\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + (-\lambda_k)^{-1})\lambda_{k-1}\vec{v}_{k-1}$.

Zu f): Es gelte $\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k + \lambda\vec{v} = \vec{0}$ mit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0)$. Dann muss $\lambda \neq 0$ sein, da wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ die Gleichung $\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda\vec{v}_k = \vec{0}$ nur für $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ möglich ist. Dann ist aber $\vec{v} = (-\lambda^{-1})\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + (-\lambda^{-1})\lambda_k\vec{v}_k$. □

Der Begriff der linearen (Un-)Abhängigkeit lässt sich auf beliebige (auch unendliche) Mengen von Vektoren erweitern:

Definition 3.3.6. Eine Menge $M \subseteq V$ heißt l.u., wenn je endlich viele verschiedene(!) Vektoren aus M l.u. sind, andernfalls l.a.

Bemerkung 3.3.7. Wir stellen einige Spezialfälle zusammen:

1. Die leere Menge ist l.u.
2. Ist $\vec{0} \in M$, so ist M l.a.
3. Jede Teilmenge einer l.u. Menge ist l.u
4. Jede in V liegende Obermenge einer l.a. Menge ist l.a.
5. Achtung: Im Falle $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 \neq \vec{0}$ sind $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ l.a., aber $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ ist l.u. (weil es tatsächlich die Menge $\{\vec{a}_1\}$ ist).

Beispiel 3.3.8. Sei G der Vektorraum der auf $\mathbb{R}$ definierten reellwertigen Funktionen: $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ und

$$M := \{f_\nu \ : \ \nu \in \mathbb{Z}\} \ \text{mit} \ f_\nu(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \nu \leq x < x+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist M l.u. Beweis: Sei $\lambda_1 f_{\nu_1} + \cdots + \lambda_k f_{\nu_k} = 0$ (die Nullfunktion) mit paarweise verschiedenen $\nu_1, \ldots, \nu_k$. Für x mit $\nu_i \leq x < \nu_i + 1$ erhalten wir

$$0 \ = \ (\lambda_1 f_{\nu_1} + \cdots + \lambda_k f_{\nu_k})\,(x) \ = \ \lambda_i f_{\nu_i}(x) \ = \ \lambda_i \,,$$

also $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Beispiel 3.3.9. Es sei $\mathbb{R}$ aufgefasst als Vektorraum über dem Unterkörper $\mathbb{Q}$ und $M = \{\pi^\nu \ : \ \nu \in \mathbb{N}_0\}$ mit der Kreiszahl $\pi = 3,14159\ldots$, dann ist M l.u., denn

$$\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \pi^\nu \ = \ 0$$

mit $\lambda_\nu \in \mathbb{Q}$ ist nur für $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$ möglich. Der Beweis dieser Aussage ist schwierig (man sagt, dass π eine transzendente Zahl ist).

Definition 3.3.10. Ist $M \subseteq V$ l.u., so schreiben wir $\langle M \rangle = \langle\langle M \rangle\rangle$, und nennen M eine Basis des Erzeugnisses $\langle M \rangle$, kurz:

$$V = \langle\langle M \rangle\rangle \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ ist l.u. und } \langle M \rangle = V\,.$$

Speziell ist eine Basis eines VR V also ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V. Im Falle $M = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ sagen wir auch: „Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ bilden eine Basis von V", und schreiben wieder kurz $\langle\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \rangle\rangle$ statt $\langle\langle \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \rangle\rangle$.

Beispiel 3.3.11. Es ist $\{\vec{0}\} = \langle\langle \emptyset \rangle\rangle$, und $\emptyset$ ist die einzige Basis von $\{\vec{0}\}$.

Beispiel 3.3.12. Die Vektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \in K^n$ aus Beispiel 3.3.3 sind l.u., wir nennen $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ die Standardbasis von K.

Beispiel 3.3.13. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, aufgefasst als Vektorraum über $K = \mathbb{R}$, hat die Basis $\{1, i\}$.

Man kann zeigen, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Wir werden uns jedoch bei der Diskussion der Basis auf relativ einfache Fälle, so genannte endlichdimensionale VR beschränken.

Definition 3.3.14. Gibt es eine maximale Zahl n von l.u. Vektoren in V, so heißt n die Dimension von V, geschrieben $\dim(V)$:

$$\dim(V) \;=\; \max\{|M| \;:\; M \subseteq V \text{ l.u.}\} \;\in\; \mathbb{N}_0\,.$$

Gibt es kein solches n (existiert also zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine l.u.-Teilmenge $M \subseteq V$ mit $|M| = k$), so heißt V unendlichdimensional und wir schreiben $\dim(V) = \infty$.

Beispiel 3.3.15. Es ist $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Beispiel 3.3.16. Es sei $V = K$ ein Körper aufgefasst als Vektorraum über sich selbst. Die Menge $\{1\}$ ist l.u., und sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so gilt $\lambda_2\lambda_1 + (-\lambda_1)\lambda_2 = 0$, d. h. die Vektoren λ_1, λ_2 sind stets l.a., also $\dim(K) = 1$.

Beispiel 3.3.17. Es ist $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$: die Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ sind l.u., also $\dim(\mathbb{R}^2) \geq 2$. Andererseits sind je drei Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $\vec{c} = (c_1, c_2)$ l.a., denn es gilt

$$(b_1c_2 - b_2c_1)\vec{a} + (c_1a_2 - a_1c_2)\vec{b} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{c} \;=\; \vec{0}\,.$$

Ist hier beispielsweise $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$, so sind schon $\vec{b}$ und $\vec{c}$ l.a., also $c_1\vec{b} - b_1\vec{c} = \vec{0} = c_2\vec{b} - b_2\vec{c}$. Ist hier $b_1 = b_2 = 0$, so ist schon $\vec{b}$ allein l.a.

Beispiel 3.3.18. Ebenso ist $\dim(\mathbb{C}) = 2$, wenn $\mathbb{C}$ als VR über $\mathbb{R}$ aufgefasst wird.

Beispiel 3.3.19. Der VR $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ besitzt die Dimension $\dim(G) = \infty$.

Satz 3.3.20. *Es sei* $\dim(V) = n < \infty$*, dann besitzt* V *eine Basis, genauer bildet jede l.u. Teilmenge mit* n *Vektoren eine Basis von* V*.*

Beweis. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ l.u. und $\vec{v} \in V$ beliebig. Nach Definition der Dimension sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \vec{v}$ l.a., nach Satz 3.3.5(f) ist $\vec{v}$ eine Linearkombination von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, also $\vec{v} \in \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$. Da $\vec{v} \in V$ beliebig war, folgt $V = \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle = \langle\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle\rangle$. ☐

Wir werden in Kürze zeigen, dass es keine Basis von V mit weniger als $\dim(V)$ Elementen gibt.

Satz 3.3.21. *Für $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n \in V$ sind äquivalent:*

(a) $V = \langle\langle\, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \,\rangle\rangle$.

(b) *Jedes $\vec{v}$ besitzt eine Darstellung*

$$\vec{v} \;=\; \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n \tag{$*$}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$, oder: die durch $(*)$ vermittelte Abbildung

$$K^n \longrightarrow V \quad , \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$$

ist bijektiv.

Beweis.
(a)$\Rightarrow$(b):
Da $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ ein Erzeugendensystem von V bildet, hat jedes $\vec{v} \in V$ mindestens eine Darstellung der Form $(*)$. Es seien $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$ und $\vec{v} = \mu_1\vec{v}_1 + \cdots + \mu_n\vec{v}_n$ zwei Darstellungen des gleichen Vektors, dann folgt aus der linearen Unabhängigkeit der $\vec{v}_j$

$$(\lambda_1 - \mu_1)\vec{v}_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\vec{v}_n = \vec{0} \;\;\Rightarrow\;\; \lambda_j - \mu_j = 0 \;\; (j = 1, \dots, n)$$

also $\lambda_j = \mu_j$, d. h. die Darstellung $(*)$ ist eindeutig.

(b)$\Rightarrow$(a):
Eine (also die einzige) Darstellung $(*)$ von $\vec{0}$ ist $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{v}_n$. Also sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ l.u. □

Satz 3.3.22. *Es sei $V = \langle\langle\, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \,\rangle\rangle$ und $\vec{w} \in V$ mit $\vec{w} \neq \vec{0}$. In der Darstellung*

$$\vec{w} \;=\; \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n \;\;,\;\; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \tag{$*$}$$

sei j ein Index mit $\lambda_j \neq 0$, dann ist auch

$$V \;=\; \langle\langle\, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{j-1}, \vec{w}, \vec{v}_{j+1}, \dots, \vec{v}_n \,\rangle\rangle \;.$$

Beweis. Es sei o.B.d.A. $j = 1$ (sonst nummerieren wir die $\vec{v}_j$ um), wir müssen $V = \langle\langle\, \vec{w}, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \,\rangle\rangle$ zeigen.

$V = \langle\, \vec{w}, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \,\rangle$:
Auflösen von $(*)$ nach $\vec{v}_1$ ergibt

$$\vec{v}_1 \;=\; \mu_1\vec{w} + \mu_2\vec{v}_2 + \cdots + \mu_n\vec{v}_n \;\text{ mit }\; \mu_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \;\; (i = 2, \dots, n)\,. \tag{$**$}$$

Sei nun $\vec{v} \in V$ beliebig, etwa $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Einsetzen von $(**)$ ergibt

$$\begin{aligned}\vec{v} \;&=\; \alpha_1(\mu_1\vec{w} + \mu_2\vec{v}_2 + \cdots + \mu_n\vec{v}_n) + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \\ &=\; \alpha_1\mu_1\vec{w} + (\alpha_1\mu_2 + \alpha_2)\vec{v}_2 + \cdots + (\alpha_1\mu_n + \alpha_n)\vec{v}_n \;\in\; \langle\, \vec{w}, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \,\rangle \;.\end{aligned}$$

$\{\vec{w}, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ ist l.u.:
Angenommen wir haben

$$\mu_1\vec{w} + \mu_2\vec{v}_2 + \cdots + \mu_n\vec{v}_n \;=\; \vec{0}\,.$$

Dann folgt mit $(*)$:

$$\vec{0} = \mu_1(\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n) + \mu_2\vec{v}_2 + \cdots + \mu_n\vec{v}_n \ = \ (\mu_1\lambda_1)\vec{v}_1 + (\mu_1\lambda_2 + \mu_2)\vec{v}_2 + \cdots + (\mu_1\lambda_n + \mu_n)\vec{v}_n$$

und damit

$$\mu_1\lambda_1 = \mu_1\lambda_2 + \mu_2 = \cdots = \mu_1\lambda_n + \mu_n = 0$$

da $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ l.u. sind, also ist $\mu_1 = 0$ wegen $\lambda_1 \neq 0$. Daraus folgt dann $\mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$, also ist $\{\vec{w}, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ l.u. $\square$

Wir verallgemeinern Satz 3.3.22 zu dem wichtigen

Satz 3.3.23 (Austauschsatz von Steinitz, Ergänzungssatz). *Es sei V ein Vektorraum und $V = \langle\langle\, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \,\rangle\rangle$ und $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k \in V$ l.u., dann ist $k \leq n$. Ferner lässt sich aus $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ eine Teilmenge $\{\vec{v}\,'_{k+1}, \ldots, \vec{v}\,'_n\}$ so auswählen, dass $V = \langle\langle\, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k, \vec{v}\,'_{k+1}, \ldots, \vec{v}\,'_n \,\rangle\rangle$ ist. Mit anderen Worten: Man kann k geeignet gewählte Vektoren der Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ gegen die $\vec{w}_i$ austauschen, so dass man wieder eine Basis von V erhält. Insbesondere lässt sich jede l.u. Teilmenge eines endlichdimensionalen VR zu einer Basis von V ergänzen.*

Beweis. Wir führen eine vollständige Induktion nach k für festes n.

Induktionsanfang $k = 1$:
Es ist $1 \leq n$. Wegen $\vec{w}_1 \neq \vec{0}$ ist in der Basisdarstellung $\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$ mindestens ein $\lambda_j \neq 0$ enthalten. Nach Satz 3.3.22 kann man also $\vec{v}_j$ gegen $\vec{w}_1$ austauschen, so dass $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{w}_1, \vec{v}_{j+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$ wieder eine Basis von V ist.

Induktionsschritt $k \to k+1$:
Die Behauptung des Satzes gelte für ein $k \in \mathbb{N}$, und es seien $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k, \vec{w}_{k+1} \in V$ linear unabhängig. Nach Induktionsannahme (angewandt auf $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k$) ist $k \leq n$, und es gibt eine Teilmenge $\{\vec{v}\,'_{k+1}, \ldots, \vec{v}\,'_n\} \subseteq \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ derart, dass

$$V \ = \ \langle\langle\, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k, \vec{v}\,'_{k+1}, \ldots, \vec{v}\,'_n \,\rangle\rangle \ . \qquad (*)$$

Wäre $k = n$, so wäre schon $V = \langle\langle\, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k \,\rangle\rangle$, also $\vec{w}_{k+1}$ eine Linearkombination von $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k$. Da $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k, \vec{w}_{k+1}$ aber l.u. sein sollen, muss folglich $k < n$, d. h. $k+1 \leq n$ sein. Wegen $(*)$ und $\vec{w}_{k+1} \neq 0$ gilt

$$\vec{w}_{k+1} \ = \ \mu_1\vec{w}_1 + \cdots + \mu_k\vec{w}_k + \mu_{k+1}\vec{v}\,'_{k+1} + \cdots + \mu_n\vec{v}\,'_n \ \text{ mit } \ \mu_1, \ldots, \mu_n \in K \ ,$$

wobei mindestens ein $\mu_i \neq 0$ ist, und zwar kann nicht $\mu_{k+1} = \cdots = \mu_n = 0$ sein, sonst wären $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k, \vec{w}_{k+1}$ l.a., also ist $\mu_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{k+1, \ldots, n\}$. Austauschen von $\vec{v}\,'_i$ gegen $\vec{w}_{k+1}$ gemäß Satz 3.3.22 ergibt die Behauptung für $k+1$. $\square$

Satz 3.3.24. *Es sei $V = \langle\langle\, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \,\rangle\rangle$, dann ist $\dim(V) = n$, und eine Teilmenge $B \subseteq V$ ist genau dann eine Basis von V, wenn B aus n l.u. Vektoren besteht.*

Beweis. Für jede l.u. Menge $M \subseteq V$ gilt nach Satz 3.3.23: $|M| \leq n$, also $\dim(V) \leq n$. Nach Definition der Dimension ist andererseits $n \leq \dim(V)$, also folgt $\dim(V) = n$. Nun sei B irgend eine Basis von V. Dann folgt zunächst $m := |B| \leq \dim(V) = n$ und dann wie oben $\dim(V) = m$, also $m = n$. Umgekehrt ist nach Satz 3.3.20 auch jede l.u. Menge $B \subseteq V$ mit $|B| = \dim(B)$ eine Basis von V. $\square$

Beispiel 3.3.25. Für die Standardvektorräume gilt $\dim(K^n) = n$, denn die Standardbasis $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ hat n Elemente. Insbesondere ist $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ und $\dim(\mathbb{C}^n) = n$ (als Vektorraum über $\mathbb{C}$), aber $\mathbb{C}^n$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ besitzt die Dimension $2n$, eine Basis ist $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n, i\vec{e}_1, \ldots, i\vec{e}_n\}$.

Satz 3.3.26. *Es sei* $\dim(V) < \infty$ *und* U *ein Unterraum von* V*, dann gilt:*

(a) $\dim(U) \leq \dim(V)$.

(b) $\dim(U) = \dim(V) \;\Leftrightarrow\; U = V$.

Beweis. Teil (a) folgt sofort aus der Definition der Dimension. Zu b): Sei $\dim(U) = \dim(V) = n$, dann besitzt U nach Satz 3.3.20 eine Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$. Diese bildet dann ebenfalls nach Satz 3.3.20 eine Basis von U, also $U = V$. □

Satz 3.3.27 (Dimensionssatz für Summenräume). *Es seien* U_1, U_2 *endlichdimensionale Unterräume eines VR* V*, dann gilt*

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) \;=\; \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)\,.$$

Beweis. Da $U_1 \cap U_2$ Unterraum von U_1 (ebenso von U_2) ist, gilt nach Satz 3.3.26: $d = \dim(U_1 \cap U_2) < \infty$. Es sei also nach Satz 3.3.20 $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_d\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ ($= \emptyset$ falls $d = 0$ ist). Wir ergänzen diese Basis nach Satz 3.3.23 zu je einer Basis von U_1 und U_2:

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_d, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r\} \text{ Basis von } U_1\,, \\ B_2 &:= \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_d, \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_s\} \text{ Basis von } U_2\,. \end{aligned}$$

Behauptung: $B := B_1 \cup B_2 = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_d, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r, \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_s\}$ ist eine Basis von $U_1 + U_2$. Wir haben zwei Aussagen zu zeigen: $\langle\, B\,\rangle = U_1 + U_2$ und B l.u.:

<u>$\langle\, B\,\rangle = U_1 + U_2$:</u>
Wegen $B \subseteq U_1 \cup U_2 \subseteq U_1 + U_2$ ($U_1 + U_2$ ist Unterraum) folgt $\langle\, B\,\rangle \subseteq U_1 + U_2$. Andererseits ist

$$U_1 + U_2 \;=\; \langle\, B_1\,\rangle + \langle\, B_2\,\rangle \;\subseteq\; \langle\, B\,\rangle + \langle\, B\,\rangle \;=\; \langle\, B\,\rangle$$

da $B_1, B_2 \subseteq B$.

<u>B ist l.u.:</u>
Es sei

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_d\vec{a}_d + \beta_1\vec{b}_1 + \cdots \beta_r\vec{b}_r + \gamma_1\vec{c}_1 + \cdots + \gamma_s\vec{c}_s \;=\; \vec{0}$$

mit $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in K$, wir müssen zeigen, dass alle Koeffizienten Null sind. Sortieren ergibt

$$\underbrace{\alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_d\vec{a}_d + \beta_1\vec{b}_1 + \cdots + \beta_r\vec{b}_r}_{\in U_1} \;=\; -\underbrace{\gamma_1\vec{c}_1 + \cdots + \gamma_s\vec{c}_s}_{\in U_2} \;\subseteq\; U_1 \cap U_2\,.$$

Dann gibt es Koeffizienten λ_l mit $-(\gamma_1\vec{c}_1 + \cdots + \gamma_s\vec{c}_s) = \lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_d\vec{a}_d$, also

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_d\vec{a}_d + \gamma_1\vec{c}_1 + \cdots + \gamma_s\vec{c}_s \;=\; \vec{0}\,.$$

Da B_2 als Basis l.u. ist folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_d = \gamma_1 = \cdots = \gamma_s = 0$. Daraus folgt

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_d\vec{a}_d + \beta_1\vec{b}_1 + \cdots + \beta_r\vec{b}_r \;=\; \vec{0}$$

und somit $\alpha_1 = \cdots = \alpha_d = \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$ da auch B_1 l.u. ist, also waren sämtliche Koeffizienten $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ Null und B ist l.u.

Da wir jetzt Basen für alle beteiligten Räume haben, können wir die Aussage des Satzes durch Zählen der Basisvektoren zeigen:

$$\dim(U_1 + U_2) = |B| = d + r + s = (d + r) + (d + s) - d \; = \; \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)\,.$$

$\square$

Beispiel 3.3.28. Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U_1 = \langle\langle\, (1,0,0), (0,1,0)\, \rangle\rangle$ sowie $U_2 = \langle\langle\, (1,-1,0), (0,0,1)\, \rangle\rangle$, also $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 2$. U_1,U_2 sind Ebenen durch $\vec{0}$, und zwar explizit

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{(x,y,0)\;:\; x,y \in \mathbb{R}\} \;\text{ die } xy\text{-Ebene}\,, \\
U_2 &= \{(x,-x,z)\;:\; x,z \in \mathbb{R}\} \\
U_1 \cap U_2 &= \{(x,-x,0)\;:\; x \in \mathbb{R}\} \;=\; \langle\langle\, (1,-1,0)\, \rangle\rangle \;,\; \text{die Gerade durch } y = -x,\; z = 0\,,
\end{aligned}$$

insbesondere ist $\dim(U_1) \cap \dim(U_2) = 1$. Mit dem Dimensionssatz folgt: $\dim(U_1 + U_2) = 2 + 2 - 1 = 3$, also $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$, d. h. alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ lassen sich schreiben als $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ mit $\vec{u}_1 \in U_1$ und $\vec{u}_2 \in U_2$. Diese Darstellung ist jedoch nicht eindeutig.

Kapitel 4

Matrizen

4.1 Grundlegende Definitionen

Im Folgenden sei K wieder ein Körper.

Definition 4.1.1. Unter einer Matrix vom Typ (m, n) mit $m, n \in \mathbb{N}$ (oder einer $m \times n$-Matrix) über K versteht man ein rechteckiges Schema der Gestalt

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in K$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Die Einträge a_{ij} heißen Komponenten oder Koeffizienten der Matrix. Den Vektor $\vec{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in K^n$ (für $1 \leq i \leq m$) bezeichnet man als den i-ten Zeilenvektor (oder kurz die i-te Zeile) von $\mathcal{A}$, den Vektor $\vec{b}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}) \in K^m$ (für $1 \leq j \leq n$) als den j-ten Spaltenvektor (oder kurz die j-te Spalte) von $\mathcal{A}$. $\vec{b}_j$ schreiben wir oft in Spaltenschreibweise

$$\vec{b}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} .$$

Man schreibt dann auch kurz

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} .$$

Die Menge aller Matrizen vom Typ (m, n) bezeichnet man mit $K^{(m,n)}$ oder $K^{m \times n}$. Die Gerade in $\mathcal{A}$, auf der die Elemente $a_{11}, \ldots, a_{rr}$ mit $r = \min(m, n)$ stehen, nennt man die Hauptdiagonale von $\mathcal{A}$. Durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen erhält man aus $\mathcal{A}$ die Matrix $\mathcal{A}^T$, die Transponierte von $\mathcal{A}$. Sie hat die Gestalt

$$\mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{(n,m)} .$$

Die Zeilen von $\mathcal{A}$ werden also die Spalten von $\mathcal{A}^T$, und die Spalten von $\mathcal{A}$ werden die Zeilen von $\mathcal{A}^T$, also

$$\mathcal{A} = (a_{kl})_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le l\le n}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}^T = (b_{kl})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le l\le m}} \text{ mit } b_{kl} = a_{lk} \,.$$

Matrizen desselben Typs über K können komponentenweise addiert und mit Skalaren aus M multipliziert werden:

Definition 4.1.2. Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in K^{(m,n)}$ mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \;,\; \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} .$$

Dann versteht man unter der <u>Summe</u> von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ die Matrix

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} .$$

Ist $\lambda \in K$, so setzt man

$$\lambda\mathcal{A} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Man schreibt $(-1) \cdot \mathcal{A} = -\mathcal{A}$.

Beispiel 4.1.3. Es sei $K = \mathbb{R}$ und

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & 2 & 6 \end{pmatrix} \;,\; \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & -5 \\ 1 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} ,$$

dann ist

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} \text{ und } 3\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 15 & 21 \\ 6 & 3 & 12 & 9 \\ 0 & -24 & 6 & 18 \end{pmatrix} .$$

Definition 4.1.4. Die Matrix vom Typ (m, n), deren sämtliche Komponenten $= 0$ sind, nennt man die <u>Nullmatrix</u>

$$0 \;=\; 0^{(m,n)} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} .$$

Man zeigt leicht

Satz 4.1.5. *$K^{(m,n)}$ bildet bzgl. der Matrizenaddition und Skalarmultiplikation mit der Nullmatrix als Nullelement einen Vektorraum über K mit Dimension $\dim(K^{(m,n)}) = m \cdot n$.*

Beweis: Übungsaufgabe. □

Von großer Bedeutung ist auch das Produkt von Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Im allgemeinen Fall sind hier jedoch $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von verschiedenem Typ. Die Motivation für die kompliziert anmutende Definition wird erst später, im Kapitel über lineare Abbildungen, ersichtlich.

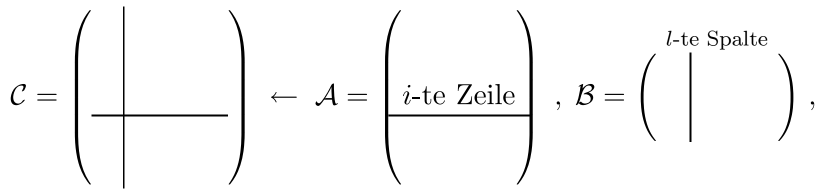
Definition 4.1.6. Sind

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in K^{(m,n)} \quad , \quad \mathcal{B} = (b_{kl})_{\substack{1\le k\le n\\1\le l\le r}} \in K^{(n,r)}$$

so versteht man unter dem Produkt $\mathcal{C} = \mathcal{AB}$ die Matrix

$$\mathcal{C} = (c_{il})_{\substack{1\le i\le m\\1\le l\le r}} \in K^{(m,r)} \ \text{ mit } \ c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jl} \ \ (1 \le i \le m,\, 1 \le l \le r)\,.$$

Bemerkung 4.1.7. Das Element in der i-ten Zeile und der l-ten Spalte der Produktmatrix $\mathcal{C}$ wird also erhalten, indem die Elemente der i-ten Zeile von $\mathcal{A}$ und der l-ten Spalte von $\mathcal{B}$ paarweise multipliziert und die Produkte addiert werden:



Damit das Produkt zweier Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ definiert ist, muss die Anzahl der Spalten von $\mathcal{A}$ mit der Anzahl der Zeilen $\mathcal{B}$ übereinstimmen. Die Produktmatrix $\mathcal{C} = \mathcal{AB}$ hat dann dieselbe Anzahl Zeilen wie $\mathcal{A}$, und die diesselbe Anzahl Spalten wie $\mathcal{B}$.

Beispiel 4.1.8. Es sei $K = \mathbb{R}$ und

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} , \ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} ,$$

dann ist das Produkt

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \ = \ \begin{pmatrix} 14 & 23 \\ -3 & 11 \\ 34 & 29 \end{pmatrix} .$$

Ein neutrales Element bezüglich dieser Multiplikation bildet die so genannte Einheitsmatrix.

Definition 4.1.9. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Matrix vom Typ (n,n), $\mathcal{E}_n = (\delta_{ij})$, $1 \le i,j \le n$ mit dem Kroneckersymbol

$$\delta_{ij} \ = \ \begin{cases} 1 & \text{falls} \ \ i = j \\ 0 & \text{falls} \ \ i \ne j \end{cases} ,$$

heißt Einheitsmatrix vom Typ (n,n).

$\mathcal{E}_n$ hat also Einsen auf der Hauptdiagonale, und Nullen außerhalb der Hauptdiagonalen. Im folgenden Satz werden die wichtigsten Eigenschaften der Matrizenmultiplikation zusammengefasst:

Satz 4.1.10. *Für Matrizen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ über K gilt sobald die Ausdrücke definiert sind (d. h. die Spalten- und Zeilenzahl zueinander passen):*

(a) *Assoziativgesetz:* $(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC})$.

(b) *Distributivgesetz:* $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$ *und* $(\mathcal{B} + \mathcal{C})\mathcal{A} = \mathcal{BA} + \mathcal{CA}$.

(c) <u>Neutralität</u> *von* $\mathcal{E}$*:* $\mathcal{E}_m \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{E}_n = \mathcal{A}$.

(d) *Im Allgemeinen ist* $\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$*, d. h. das Kommutativgesetz gilt nicht.*

Beweis. Zu a): Es sei

$$\mathcal{A} = (a_{fg})_{\substack{1\le f\le l\\ 1\le g\le m}} \;,\; \mathcal{B} = (b_{hi})_{\substack{1\le h\le m\\ 1\le i\le n}} \;,\; \mathcal{C} = (c_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le r}} \,.$$

Die in der Behauptung auftretenden Produkte sind offenbar definiert, wir bezeichnen sie mit

$$\mathcal{AB} = (d_{fi})_{\substack{1\le f\le l\\ 1\le i\le n}} \;,\; \mathcal{BC} = (e_{hk})_{\substack{1\le h\le m\\ 1\le k\le r}} \,.$$

Nach Definition ist

$$d_{fi} = \sum_{g=1}^{m} a_{fg} b_{gi} \;,\; e_{hk} = \sum_{i=1}^{n} b_{hi} c_{ik} \,. \tag{$*$}$$

Für die Komponente u_{fk} von $(\mathcal{AB})\mathcal{C}$ gilt nach Definition des Produkts und $(*)$:

$$u_{fk} \;=\; \sum_{i=1}^{n} d_{fi} c_{ik} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{g=1}^{m} a_{fg} b_{gi} \right) c_{ik} \,.$$

Andererseits gilt für das Element v_{fk} von $\mathcal{A}(\mathcal{BC})$

$$v_{fk} \;=\; \sum_{g=1}^{m} a_{fg} e_{gk} \;=\; \sum_{g=1}^{m} a_{fg} \sum_{i=1}^{n} b_{gi} c_{ik} \,.$$

Nach dem Distributivgesetz in K gilt $u_{fk} = v_{fk}$, und damit $(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC})$.

Zu b): Nun sei

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \;,\; \mathcal{B} = (b_{kl})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le l\le r}} \;,\; \mathcal{C} = (c_{kl})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le l\le r}} \,.$$

Dann gilt für die Komponente d_{il} von $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C})$

$$d_{il} \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jl} + c_{jl}) \,.$$

Für die Komponente e_{il} bzw. f_{il} von $\mathcal{AB}$ bzw. $\mathcal{AC}$ gilt

$$e_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} \;\text{ bzw. }\; f_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jl} \,,$$

also $d_{il} = e_{il} + f_{il}$, und somit $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$. Das zweite Distributivgesetz wird analog bewiesen.

Zu c): Es sei

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \;,\; \mathcal{E}_n = (\delta_{kl})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le l\le r}} \,,\; \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \,.$$

Für das Element b_{il} von $\mathcal{A}\mathcal{E}_n$ gilt dann

$$b_{il} \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta_{jl} \;=\; a_{il} \,,$$

also $\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{A}$. Analog wird $\mathcal{E}_n\mathcal{B} = \mathcal{B}$ bewiesen.

Zu d): Oft ist nur eines der beiden Produkte $\mathcal{AB}$ bzw. $\mathcal{BA}$ überhaupt definiert. Es ist jedoch auch leicht, Gegenbeispiele zu finden, wenn beide Produkte definiert sind. Ein Beispiel, das für jeden Körper K existiert, ist

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

denn es gilt

$$\mathcal{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix} \quad \neq \quad \mathcal{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+1 & 1 \end{pmatrix}$$

unabhängig davon, welches Element $1 + 1 \in K$ ist. □

Einen wichtigen Spezialfall von Matrizen bilden die quadratischen Matrizen:

Definition 4.1.11. Eine Matrix vom Typ (m, n) heißt quadratisch, wenn $m = n$ ist.

Satz 4.1.12. *Die Menge $K^{(n,n)}$ der quadratischen Matrizen mit n Zeilen/Spalten bildet bzgl. der Matrizenaddition und -multiplikation einen Ring mit Einselement $\mathcal{E}_n$. $K^{(n,n)}$ ist für $n \geq 2$ nicht kommutativ.*

Beweis. Die Ringaxiome folgen aus Satz 4.1.10. Das Beispiel zur Nichtkommutativität lässt sich leicht für alle $n \geq 2$ ausdehnen. □

Satz 4.1.13. *Für Matrizen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ über K gilt, sofern $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{AB}$ definiert ist:*

(a) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^T = \mathcal{A}^T + \mathcal{B}^T$.

(b) $(\mathcal{AB})^T = \mathcal{B}^T\mathcal{A}^T$.

Beweis. Aussage (a) ist trivial, und für (b) sei

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \quad , \quad \mathcal{B} = (b_{kl})_{\substack{1\leq k\leq n \\ 1\leq l\leq r}} ,$$

dann ist

$$\mathcal{A}^T = (a'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \; , \; a'_{ij} = a_{ji} \;\text{ bzw. }\; \mathcal{B}^T = (b'_{kl})_{\substack{1\leq k\leq r \\ 1\leq l\leq n}} \; , \; b'_{kl} = b_{lk} \; .$$

Das Element c_{il} von $\mathcal{AB}$ ist

$$c_{il} \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jl} \; ,$$

das Element d_{il} von $\mathcal{B}^T\mathcal{A}^T$ ist

$$d_{il} \;=\; \sum_{j=1}^{n} b'_{ij}a'_{jl} \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{lj}b_{ji} \;=\; c_{li} \; ,$$

also ist $\mathcal{B}^T\mathcal{A}^T = (\mathcal{AB})^T$. □

4.2 Der Rang einer Matrix und elementare Umformungen

Definition 4.2.1. Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren in einer Matrix $\mathcal{A} \in K^{(m,n)}$ heißt der Zeilenrang von $\mathcal{A}$, die Maximalzahl l.u. Spaltenvektoren von $\mathcal{A}$ heißt der Spaltenrang von $\mathcal{A}$.

Bemerkung 4.2.2. Es seien $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \in K^n$ die Zeilenvektoren und $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n \in K^m$ die Spaltenvektoren von $\mathcal{A}$. Nach Satz 3.3.24 ist dann

$$\begin{aligned} \text{Zeilenrang von } \mathcal{A} &= \dim(\langle\, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \,\rangle) \\ \text{Spaltenrang von } \mathcal{A} &= \dim(\langle\, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n \,\rangle)\,. \end{aligned}$$

Zur einfachen Berechnung von Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix bedient man sich elementarer Umformungen:

Definition 4.2.3. Als elementare Umformungen einer Matrix $\mathcal{A} \in K^{(m,n)}$ bezeichnet man:

- Elementare Zeilenumformungen:
  1. Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ aus K,
  2. Addition einer mit $\lambda \in K$ multiplizierten Zeile zu einer anderen Zeile,
  3. Vertauschung zweier Zeilen.
- Elementare Spaltenumformungen:
  1'. Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ aus K,
  2'. Addition einer mit $\lambda \in K$ multiplizierten Spalte zu einer anderen Spalte,
  3'. Vertauschung zweier Spalten.

Beispiel 4.2.4. Eine typische Umformungsfolge ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III-3·II}]{\text{2'}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 \\ 2 & -5 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III-I}]{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{III+2·II}]{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}\cdot\frac{1}{3}]{1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I-II}]{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{III-}\frac{7}{6}\text{I}]{\text{2'}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III+}\frac{7}{3}\text{II}]{\text{2'}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{I}]{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 4.2.5. Eine andere Umformungsfolge für die gleiche Matrix ergibt

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2'}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2'}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2'}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Satz 4.2.6. *Durch elementare Umformungen lässt sich jede Matrix $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in K^{(m,n)}$ überführen in eine Matrix $D_r^{(m,n)}$ der Form*

$$D_r^{(m,n)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{array}\right) = (c_{ij}) \text{ mit } c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Beweis. Ist $\mathcal{A} = 0_{m,n}$ die Nullmatrix, dann sind wir fertig mit $r = 0$. Gibt es ein $a_{ij} \neq 0$, so kann dieses durch die Umformungen 3 und 3' an die Stelle von a_{11} getauscht werden. Multiplikation der 1. Zeile (oder 1. Spalte) mit a_{ij}^{-1} liefert in der linken oberen Ecke eine 1. Die Elemente der neuen Matrix nennen wir wieder a_{ij}, jetzt also mit $a_{11} = 1$. Nun wird das a_{12}-fache der 1. Spalte von der 2. Spalte subtrahiert, dann das a_{13}-fache der 1. Spalte von der 3. Spalte usw.: nach diesen Umformungen erhält die 1. Zeile die Gestalt $(1, 0, \dots, 0)$. Jetzt subtrahiert man das a_{21}-fache der 1. Zeile von der 2. Zeile usw., damit erhält man eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{A}' & \\ 0 & & & \end{array}\right) .$$

Mit der Restmatrix $\mathcal{A}' \in K(m-1, n-1)$ wird analog verfahren. Offenbar haben elementare Umformungen von $\mathcal{A}'$ wegen Nullen am Rand keinen Einfluss auf die 1. Zeile sowie die 1. Spalte der ursprünglichen Matrix. Falls nicht schon $\mathcal{A}' = 0_{m-1,n-1}$ ist, geht $\mathcal{A}'$ ihrerseits über in eine Matrix der obigen Gestalt. Wir haben also die Umformungskette

$$\mathcal{A} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{A}' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathcal{A}'' & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right) .$$

Dieses Verfahren bricht spätestens nach $s = \min(m, n)$ Schritten ab, und der Satz ist bewiesen. ☐

Beispiel 4.2.7.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 10 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{1'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{1'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = D_3^{(3,4)} .$$

Satz 4.2.8. *Elementare Umformungen verändern weder Zeilen- noch Spaltenrang einer Matrix.*

Beweis. Wegen der Analogie zwischen Zeilen und Spalten genügt es zu zeigen, dass elementare Zeilenumformungen weder Zeilen- noch Spaltenrang einer Matrix verändern. Wir beschränken uns auf die Operation 2, der Beweis für die anderen Operationen verläuft analog. Wir addieren o.B.d.A. ein Vielfaches der 1. auf die 2. Zeile:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \mathcal{A}' = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 + \lambda\vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} .$$

Dann gilt $\langle\, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \,\rangle = \langle\, \vec{a}_1, \vec{a}_2 + \lambda\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \,\rangle$, ist nämlich $\vec{v} = \mu_1\vec{a}_1 + \mu_2\vec{a}_2 + \cdots + \mu_m\vec{a}_m$, so gilt auch

$$\vec{v} \;=\; (\mu_1 - \mu_2\lambda)\vec{a}_1 + \mu_2(\vec{a}_2 + \lambda\vec{a}_1) + \mu_3\vec{a}_3 + \cdots + \mu_m\vec{a}_m \,.$$

Andererseits gilt für $\vec{w} = \nu_1\vec{a}_1 + \nu_2(\vec{a}_2 + \lambda\vec{a}_1) + \cdots + \nu_m\vec{a}_m$ auch

$$\vec{w} \;=\; (\nu_1 + \lambda\nu_2)\vec{a}_1 + \nu_2\vec{a}_2 + \cdots + \nu_m\vec{a}_m \,.$$

Also haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ nicht nur gleichen Zeilenrang, ihre Zeilenvektoren spannen sogar denselben Unterraum von K^n auf. Sind

$$\vec{b}_{l_1} = \begin{pmatrix} a_{1,l_1} \\ a_{2,l_1} \\ \vdots \\ a_{m,l_1} \end{pmatrix} , \;\dots\; , \; \vec{b}_{l,s} = \begin{pmatrix} a_{1,l_s} \\ a_{2,l_s} \\ \vdots \\ a_{m,l_s} \end{pmatrix}$$

beliebige Spaltenvektoren von $\mathcal{A}$, dann sind die entsprechenden Spalten in $\mathcal{A}'$

$$\vec{b}'_{l_1} = \begin{pmatrix} a_{1,l_1} \\ a_{2,l_1} + \lambda a_{1,l_1} \\ \vdots \\ a_{m,l_1} \end{pmatrix} , \;\dots\; , \; \vec{b}'_{l,s} = \begin{pmatrix} a_{1,l_s} \\ a_{2,l_s} + \lambda a_{1,l_s} \\ \vdots \\ a_{m,l_s} \end{pmatrix}$$

Jede lineare Relation

$$\mu_1\vec{b}_{l_1} + \cdots + \mu_s\vec{b}_{l_s} \;=\; \vec{0}$$

ist äquivalent zur entsprechenden Relation

$$\mu_1\vec{b}'_{l_1} + \cdots + \mu_s\vec{b}'_{l_s} \;=\; \vec{0}\,,$$

die $\vec{v}_l$ sind also genau dann linear unabhängig, wenn die entsprechenden $\vec{b}'_l$ es sind. Daher haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ auch gleichen Spaltenrang. □

Satz 4.2.9. *Für jede Matrix $\mathcal{A} \in K^{(m,n)}$ gilt:*

$$\textit{Zeilenrang von } \mathcal{A} \;=\; \textit{Spaltenrang von } \mathcal{A}\,.$$

Diese Zahl heißt der Rang von $\mathcal{A}$, geschrieben $\mathrm{rg}(\mathcal{A})$.

Es ist $\mathrm{rg}(\mathcal{A}) = r$ die Anzahl der Einsen aus der Matrix $D_r^{(m,n)}$ aus Satz 4.2.6.

Bemerkung 4.2.10. Die Zahl r hängt also nur von $\mathcal{A}$ ab, und nicht davon, mit welcher Serie elementarer Umformungen die Matrix $D_r^{(m,n)}$ gewonnen wurde.

Beweis von Satz 4.2.9. Nach Satz 4.2.8 hat $D_r^{(m,n)}$ denselben Zeilen- bzw. Spaltenrang wie $\mathcal{A}$. Der Zeilen- sowie der Spaltenrang von $D_r^{(m,n)}$ ist aber offensichtlich r. ☐

Beispiel 4.2.11. Nach den vorigen Beispielen ist

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 3 \ , \ \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} = 2 \, .$$

Definition 4.2.12. Eine quadratische Matrix $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$ heißt <u>regulär</u>, falls $\operatorname{rg}(\mathcal{A}) = n$ ist. Andernfalls ($\operatorname{rg}(\mathcal{A}) < n$) heißt $\mathcal{A}$ <u>singulär</u>.

Satz 4.2.13. *Ist $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$ regulär, so lässt sich $\mathcal{A}$ schon allein durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix $\mathcal{E}_n$ überführen, ebenso auch allein durch Spaltenumformungen.*

Beweis. Es sei $\mathcal{A} = (a_{ij})$ mit $1 \leq i, j \leq n$. Mindestens eines der Elemente a_{k1} der 1. Spalte muss $\neq 0$ sein. Durch die Umwandlungen 3 und 1 erhält man in der linken oberen Ecke eine 1. Anwendung von 2 ergibt dann eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} .$$

Da die 1. und 2. Spalte l.u. sind, muss hier mindestens eine der Komponenten $a'_{22}, \ldots, a'_{n2}$ in der 2. Spalte $\neq 0$ sein. Man erhält dann analog eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & \cdots & a''_{1n} \\ 0 & 1 & a''_{23} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn} \end{pmatrix} .$$

Nach n Schritten ist die Einheitsmatrix hergestellt. Der Beweis für Spaltenumformungen ist analog. ☐

Beispiel 4.2.14. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{E}_3 \, .$$

Definition 4.2.15. Eine Matrix $\tilde{\mathcal{E}} \in K^{(n,n)}$ heißt Elementarmatrix, wenn sie aus der Einheitsmatrix $\mathcal{E}_n$ durch eine elementare Umformung hervorgeht. Wir sagen, dass $\tilde{\mathcal{E}}$ zu dieser Umformung gehört.

Bemerkung 4.2.16. Es gibt demnach 3 Typen von Elementarmatrizen:

Typ 1: Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \neq 0$:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Typ 2: Addition des λ-fachen der j-Zeile zur i-ten Zeile:

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \lambda & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Typ 3: Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile:

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Die gleichen Matrizen gehören zu den Spaltenoperationen 1',2',3'.

Wie man durch Nachrechnen leicht zeigt, gilt der folgende

Satz 4.2.17. *Entsteht $\tilde{\mathcal{A}}$ aus $\mathcal{A} \in K^{(m,n)}$ durch eine elementare Zeilenumformung (bzw. Spaltenumformung), dann gilt $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{C}}\mathcal{A}$ (bzw. $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\tilde{\mathcal{C}}$) für die zur Umformung gehörende Matrix $\tilde{\mathcal{E}}$.*

4.3 Die Inverse einer Matrix

Definition 4.3.1. Eine quadratische Matrix $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$ heißt invertierbar, wenn es eine Matrix $\mathcal{B} \in K^{(n,n)}$ gibt mit $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{E}_n$ oder $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E}_n$.

Satz 4.3.2. *Eine Matrix $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\mathcal{A}$ regulär ist. $\mathcal{A}$ besitzt dann sowohl ein Linksinverses als auch Rechtsinverses.*

Beweis. Zuerst die
Richtung $\Rightarrow$:
$\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$ sei invertierbar mit $\mathcal{BA} = \mathcal{E}_n$ oder $\mathcal{AB} = \mathcal{E}_n$.
Fall 1: $\mathcal{BA} = \mathcal{E}$. Es seien $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \in K^n$ die Spaltenvektoren von $\mathcal{A}$, und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ beliebig mit

$$\lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{b}_n \; = \; \vec{0} \, .$$

Dann folgt

$$\vec{0} = \mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \underset{\cdot \mathcal{B} \text{ von links}}{\Longrightarrow} \vec{0} = \mathcal{BA} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \mathcal{E}_n \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

also sind alle $\lambda_j = 0$. Damit sind $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ l.u. und $\mathcal{A}$ regulär.
Fall 2: $\mathcal{AB} = \mathcal{E}_n$. Das folgt aus Fall 1 wegen

$$\mathcal{AB} = \mathcal{E}_n \;\Rightarrow\; \mathcal{B}^T \mathcal{A}^T = \mathcal{E}_n^T = \mathcal{E}_n \;\Rightarrow\; \mathcal{A}^T \text{ regulär } \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \text{ regulär} \, .$$

Richtung $\Leftarrow$:
Es sei $\mathcal{A}$ regulär. Nach Satz 4.2.13 lässt sich $\mathcal{A}$ durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix $\mathcal{E}_n$ überführen. Nach Satz 4.2.17 gibt es daher eine Folge von Elementarmatrizen $\tilde{\mathcal{E}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{E}}_m$, so dass $\tilde{\mathcal{E}}_m \cdots \tilde{\mathcal{E}}_1 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{E}_n$ ist. Also ist $\mathcal{BA} = \mathcal{E}_n$ für $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{E}}_m \cdots \tilde{\mathcal{E}}_1$. Analog erhält man eine Rechtsinverse, indem man die Elementarmatrizen aufmultipliziert, die zu den Spaltenumformungen aus Satz 4.2.13 gehören. □

Satz 4.3.3. *Die regulären Matrizen in $K^{(n,n)}$ bilden bzgl. der Multiplikation eine (für $n \geq 2$ nichtabelsche) Gruppe. Insbesondere gilt: Zu jeder regulären Matrix $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$ gibt es genau eine inverse Matrix $\mathcal{A}^{-1} \in K^{(n,n)}$ mit $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_n$. Es gilt zudem $(\mathcal{A}^T)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^T$.*

Beweis. Es sei $G = \left\{ \mathcal{A} \in K^{(n,n)} \; : \; \mathcal{A} \text{ regulär} \right\}$. Es ist $\mathcal{E}_n \in G$. Das Assoziativgesetz gilt in $(G, \cdot)$ nach Satz 4.1.10. Zu $\mathcal{A} \in G$ gibt es nach Satz 4.3.2 ein $\mathcal{B} \in K^{(n,n)}$ mit $\mathcal{AB} = \mathcal{E}_n$, und zwar ist dann $\mathcal{B}$ auch invertierbar, also $B \in G$ nach Satz 4.3.2. Zu zeigen bleibt, dass G bzgl „ $\cdot$ “ auch abgeschlossen ist: zu $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in G$ wähle $\mathcal{A}', \mathcal{B}' \in G$ mit $\mathcal{A}'\mathcal{A} = \mathcal{B}'\mathcal{B} = \mathcal{E}_n$. Dann ist

$$(\mathcal{B}'\mathcal{A}')(\mathcal{AB}) = \mathcal{B}'\mathcal{E}_n\mathcal{B} = \mathcal{E}_n \;\Rightarrow\; \mathcal{AB} \text{ invertierbar } \;\Rightarrow\; \mathcal{AB} \in G$$

nach Satz 4.3.2. Somit ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, die Eindeutigkeit der Inversen $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{-1}$ folgt mit Satz 2.2.8. Ferner ist

$$(\mathcal{A}^{-1})^T \mathcal{A}^T = (\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})^T = \mathcal{E}_n^T = \mathcal{E}_n \;\Rightarrow\; (\mathcal{A}^{-1})^T = (\mathcal{A}^T)^{-1} \, .$$

□

Definition 4.3.4. Mit $\mathrm{GL}(n, K) = \{\mathcal{A} \in K^{(n,n)} \text{ regulär}\}$ bezeichnen wir die (multiplikative) Gruppe der invertierbaren (n, n)-Matrizen.

Satz 4.3.5. *Es sei $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(n, K)$. Man erhält $\mathcal{A}^{-1}$, indem man an $\mathcal{E}_n$ simultan diesselben Zeilenumformungen vornimmt, die man verwendet, um $\mathcal{A}$ (gemäß Satz 4.2.13) in $\mathcal{E}_n$ zu überführen.*

Beweis. Nach Satz 4.2.17 entsprechen diese Zeilenumformungen der Multiplikation mit einem Produkt von gewissen Elementarmatrizen $\tilde{\mathcal{C}} = \tilde{\mathcal{E}}_m \tilde{\mathcal{E}}_{m-1} \cdots \tilde{\mathcal{E}}_1 \in \mathrm{GL}(n, K)$ von links, d. h. $\tilde{\mathcal{C}}\mathcal{A} = \mathcal{E}_n$. Das Resultat derselben Umformungen an $\mathcal{E}_n$ ist dann $\tilde{\mathcal{C}}\mathcal{E}_n = \tilde{\mathcal{C}}$, aber $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{A}^{-1}$. $\square$

Beispiel 4.3.6. Wir berechnen die Inverse der Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mit der folgenden Umformungskette:

$\mathcal{A}$			$\mathcal{E}$		
6	2	3	1	0	0
4	5	-2	0	1	0
7	2	4	0	0	1
-1	0	-1	1	0	-1
4	5	-2	0	1	0
7	2	4	0	0	1
1	0	1	-1	0	1
0	5	-6	4	1	-4
0	2	-3	7	0	-6
1	0	1	-1	0	1
0	1	0	-10	1	8
0	0	-3	27	-2	-22
3	0	3	-3	0	3
0	1	0	-10	1	8
0	0	-3	27	-2	-22
3	0	0	24	-2	-19
0	1	0	-10	1	8
0	0	-3	27	-2	-22
3	0	0	24	-2	-19
0	3	0	-30	3	24
0	0	3	-27	2	22
1	0	0			
0	1	0		$\mathcal{A}^{-1}$	
0	0	1			

mit der Inversen

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 24 & -2 & -19 \\ -30 & 3 & 24 \\ -27 & 2 & 22 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht die Probe

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & -2 & -19 \\ -30 & 3 & 24 \\ -27 & 2 & 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathcal{E}_3$$

nach.

Kapitel 5

Lineare Abbildungen

5.1 Definitionen und einfache Eigenschaften

Es seien stets $V, W, V', \ldots$ Vektorräume über demselben Körper K. Dieser Abschnitt befasst sich mit Abbildungen zwischen Vektorräumen, die mit den linearen Operationen verträglich sind:

Definition 5.1.1. Eine Abbildung $\varphi: V \to V'$ heißt linear oder ein (VR-)Homomorphismus, falls:

(L1) $\varphi(\vec{a}+\vec{b}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b})$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$.

(L2) $\varphi(\lambda\vec{a}) = \lambda\varphi(\vec{a})$ für alle $\lambda \in K$ und $\vec{a} \in V$.

Oder äquivalent dazu

(L) $\varphi(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}) = \lambda\varphi(\vec{a}) + \mu\varphi(\vec{b})$ für alle $\lambda, \mu \in K$ und $\vec{a}, \vec{b} \in V$.

Die Menge aller linearen Abbildungen $\varphi: V \to V'$ wird mit $L(V, V')$ bezeichnet. Ein $\varphi \in L(V, V')$ heißt ein (VR)-Isomorphismus, wenn φ bijektiv ist. Existiert ein Isomorphismus $\varphi: V \to V'$, so heißt V isomorph zu V', geschrieben $V \cong V'$. Ein $\varphi \in L(V, V)$ (also $V = V'$) heißt Endomorphismus, bzw. im Falle der Bijektivität Automorphismus von V.

Beispiel 5.1.2. Es gibt stets den trivialen Homomorphismus: $\varphi_0(\vec{a}) = \vec{0}' \in V'$ für alle $\vec{a} \in V$.

Beispiel 5.1.3. Der Endomorphismus $\varphi: V \to V$, $\varphi(\vec{a}) = \lambda\vec{a}$ für festes $\lambda \in K$ ist trivial für $\lambda = 0$, und ein Automorphismus für $\lambda \neq 0$ (da injektiv wegen $\varphi(\vec{a}) = \varphi(\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$, und surjektiv wegen $\varphi(\lambda^{-1}\vec{a}) = \vec{a}$).

Beispiel 5.1.4. Für $V = \mathbb{R}^2$ ist $\varphi(x, y) = (\lambda x, \mu y)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ die so genannte Eulerabbildung. Die Ebene wird in x-Richtung um den Faktor λ und in y-Richtung um den Faktor μ gestreckt. φ ist offenbar ein Automorphismus.

Beispiel 5.1.5. Es sei $V = \mathbb{R}^2$. Die Projektion auf die x-Achse $\varphi: V \to V$, $\varphi(x, y) = (x, 0)$ ist weder injektiv noch surjektiv, also kein Automorphismus.

Beispiel 5.1.6. Für $V = \mathbb{R}^2$ heißt der Automorphismus $\varphi: V \to V$, $\varphi(x, y) = (x + \lambda y, y)$ für festes $\lambda \in \mathbb{R}$ Scherung.

Beispiel 5.1.7. Der Homomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

für feste $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ist eine so genannte <u>Linearform</u>.

Beispiel 5.1.8. Es sei $F_0 = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; p \,\text{Polynom}\}$. Für $p \in F_0$ mit

$$p(x) \;=\; \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$$

sei $\varphi(p) = p'$ die Ableitung mit

$$p'(x) \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cdot \nu \cdot x^{\nu-1} \,.$$

Dann ist φ ein Endomorphismus von F_0. Er ist surjektiv, denn für

$$\tilde{p}(x) \;=\; \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{\nu+1} x^{\nu+1}$$

ist $\varphi(\tilde{p}) = p$. Er ist nicht injektiv, beispielsweise gilt $\varphi(p_0) = 0$ für jedes konstante Polynom $p_0(x) = a_0$. φ ist ein Beispiel für einen linearen <u>Differentialoperator</u>.

Satz 5.1.9. *Für Vektorräume V, V' und V'' gilt:*

(a) *Ist $\varphi \in L(V, V')$ und $\psi \in L(V', V'')$, so ist $\psi \circ \varphi \in L(V, V'')$.*

(b) *Ist $\varphi : V \to V'$ ein Isomorphismus, so auch die inverse Abbildung $\varphi^{-1} : V' \to V$.*

Beweis. Zu a): Seien $\vec{a}, \vec{b} \in V$ und $\lambda, \mu \in K$, dann gilt

$$(\psi \circ \varphi)(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \psi(\lambda\varphi(\vec{a}) + \mu\varphi(\vec{b})) = \lambda(\psi \circ \varphi)(\vec{a}) + \mu(\psi \circ \varphi)(\vec{b}) \,.$$

Zu b): Da φ^{-1} offenbar injektiv ist, müssen wir nur (L) zeigen. Es seien $\vec{a}', \vec{b}' \in V'$ und $\lambda, \mu \in K$ mit $\vec{a}' = \varphi(\vec{a})$ und $\vec{b}' = \varphi(\vec{b})$ für $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Dann folgt

$$\varphi^{-1}(\lambda\vec{a}' + \mu\vec{b}') = \varphi^{-1}(\lambda\varphi(\vec{a}) + \mu\varphi(\vec{b})) = \varphi^{-1}(\varphi(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \lambda\varphi^{-1}(\vec{a}') + \mu\varphi^{-1}(\vec{b}') \,.$$

□

Satz 5.1.10. *Für $\varphi, \psi \in L(V, V')$ und $\lambda \in L$ seien $\varphi + \psi, \lambda\varphi \in L(V, V')$ werteweise definiert durch*

$$(\varphi + \psi)(\vec{a}) \;:=\; \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b}) \;\;,\;\; (\lambda\varphi)(\vec{a}) \;:=\; \lambda\varphi(\vec{a}) \;\; (\forall \vec{a} \in V) \,.$$

Mit diesen Operationen wird $L(V, V')$ zu einem Vektorraum über K. Der Nullvektor ist der triviale Homomorphismus $\varphi_0(\vec{a}) = \vec{0}' \in V'$ für alle $\vec{a} \in V$.

Beweis. Durch Nachrechnen sieht man leicht die Gültigkeit der Regel (L) für $\varphi + \psi$ sowie $\lambda\varphi$. Auch die VR-Axiome werden leicht nachgeprüft. □

Satz 5.1.11. *Mit der oben definierten Addition sowie der Komposition von Abbildungen „$\circ$“ als Multiplikation ist $(L(V, V), +, \circ)$ ein Ring mit Eins, der <u>Endomorphismenring</u> von V. Einselement ist die <u>Identität</u> $\mathrm{id}_V : \vec{a} \mapsto \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in V$.*

Beweis. Nach Satz 5.1.10 ist $(L(V,V),+)$ eine abelsche Gruppe. Nach Satz 5.1.9 ist $\circ$ eine Verknüpfung auf $L(V,V)$. Das Assoziativgesetz der Multiplikation gilt, da es allgemein für die Komposition von Abbildungen gilt. Die Distributivgesetze gelten ebenfalls: für $\psi,\varphi,\chi \in L(V,V)$ und alle $\vec{a} \in V$ gilt

$$(\varphi\circ(\psi+\chi))(\vec{a}) = \varphi(\psi(\vec{a})+\chi(\vec{a})) = \varphi(\psi(\vec{a}))+\varphi(\chi(\vec{a})) = (\varphi\circ\psi)(\vec{a})+(\varphi\circ\chi)(\vec{a}) = (\varphi\circ\psi+\varphi\circ\chi)(\vec{a})\,.$$

Ebenso ist

$$((\psi+\chi)\circ\varphi)(\vec{a}) = \psi(\varphi(\vec{a}))+\chi(\varphi(\vec{a})) = (\psi\circ\varphi+\chi\circ\varphi)(\vec{a})\,.$$

Für das Einselement gilt $\mathrm{id}_V \circ \varphi = \varphi \circ \mathrm{id}_V = \varphi$ für alle $\varphi \in L(V,V)$. □

Satz 5.1.12. *Die Automorphismen von V bilden bzgl. $\circ$ eine Gruppe, die lineare Gruppe von V, geschrieben* $\mathrm{GL}(V)$*.*

Beweis. $\circ$ ist eine Verknüpfung auf $\mathrm{GL}(V)$: mit φ,ψ ist auch $\psi\circ\varphi:\ V\to V$ bijektiv, die Linearität folgt nach Satz 5.1.9. Das Assoziativgesetz folgt nach Satz 5.1.11, das Einselement ist id_V, das Inverse von φ ist die Umkehrabbildung φ^{-1}. □

5.2 Kern und Bild

Satz 5.2.1. *Für $\varphi \in L(V,V')$ gilt:*

(a) $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}'$.

(b) *Sind $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n \in V$ l.a., so auch $\varphi(\vec{a}_1),\dots,\varphi(\vec{a}_n) \in V'$.*

(c) *Sind $\varphi(\vec{a}_1),\dots,\varphi(\vec{a}_n) \in V'$ l.u., so auch $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n \in V$.*

Beweis. Zu a): Es gilt $\varphi(\vec{0}) = \varphi(\vec{0}+\vec{0}) = \varphi(\vec{0})+\varphi(\vec{0})$, woraus $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}'$ folgt.
Zu b): Aus $\lambda_1\vec{a}_1+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ folgt

$$\lambda_1\varphi(\vec{a}_1)+\cdots+\lambda_n\varphi(\vec{a}_n) \;=\; \varphi(\lambda_1\vec{a}_1+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n) \;=\; \vec{0}'$$

nach (a). Teil (c) folgt direkt aus (b). □

Satz 5.2.2. *Sei $\psi \in L(V,V')$, dann gilt:*

(a) *Ist $M \subseteq V$, dann gilt $\varphi(\langle\, M\,\rangle) = \langle\, \varphi(M)\,\rangle$. Insbesondere ist das Bild eines Unterraums $U \subseteq V$ ein Unterraum von V'.*

(b) *Für einen Unterraum $U' \subseteq V'$ ist $\varphi^{-1}(U') = \{\vec{a}\in V\ :\ \varphi(\vec{a})\in U'\}$ ein Unterraum von V.*

Beweis. Zu a): Fall 1: Es sei $M=\emptyset$. Dann ist $\langle\, M\,\rangle = \{\vec{0}\}$ und $\varphi(\langle\, M\,\rangle) = \{\vec{0}'\} = \langle\,\emptyset\,\rangle = \langle\,\varphi(M)\,\rangle$.
Fall 2: $M\neq\emptyset$. Wir zeigen zunächst $\varphi(\langle\, M\,\rangle)\subseteq\langle\,\varphi(M)\,\rangle$: Ist $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n \in \langle\, M\,\rangle$, dann ist $\varphi(\vec{a}) = \lambda_1\varphi(\vec{a}_1)+\cdots+\lambda_n\varphi(\vec{a}_n) \in \langle\,\varphi(M)\,\rangle$. Jetzt müssen wir noch $\langle\,\varphi(M)\,\rangle \subseteq \varphi(\langle\, M\,\rangle)$ zeigen. Sei dazu $\vec{b}\in\langle\,\varphi(M)\,\rangle$, d. h. $\vec{b} = \lambda_1\vec{b}_1+\cdots+\lambda_n\vec{b}_n$ mit $\vec{b}_j\in\varphi(M)$. Dann gibt es $\vec{a}_j\in M$ $(1\le j\le n)$ mit $\varphi(\vec{a}_j) = \vec{b}_j$. Es gibt $\lambda_j\in K$ mit $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n \in \langle\, M\,\rangle$ und damit

$$\varphi(a) = \lambda_1\varphi(\vec{a}_1)+\cdots+\lambda_n\varphi(\vec{a}_n) = \lambda_1\vec{b}_1+\cdots+\lambda_n\vec{b}_n = \vec{b}\,,$$

also $\vec{b}\in\varphi(\langle\, M\,\rangle)$. Damit ist insgesamt $\langle\,\varphi(M)\,\rangle = \varphi(\langle\, M\,\rangle)$ gezeigt.

Zu b): Es ist $\varphi^{-1}(U') \neq \emptyset$, da $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}' \in U'$ ist, also $\vec{0} \in \varphi^{-1}(U')$. Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \varphi^{-1}(U')$ gegeben, also $\varphi(\vec{a}), \varphi(\vec{b}) \in U'$, ferner seien $\lambda, \mu \in K$. Dann gilt

$$\varphi(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda\varphi(\vec{a}) + \mu\varphi(\vec{b}) \in U' ,$$

d. h. $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \in \varphi^{-1}(U')$. □

Satz 5.2.3. *Es sei* $\varphi \in L(V, V')$ *und* U *ein Unterraum von* V*, dann ist* $\dim(\varphi(U)) \leq \dim(U)$*. Insbesondere folgt* $\dim(V) = \dim(V')$ *aus* $V \cong V'$*.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $\dim(U) < \infty$, dann besitzt nach Satz 3.3.20 U eine Basis B, also $U = \langle B \rangle$. Nach Satz 5.2.2 gilt $\varphi(U) = \varphi(\langle B \rangle) = \langle \varphi(B) \rangle$, also ist $\varphi(B)$ ein Erzeugendensystem von $\varphi(U)$. Dann ist $\dim(\varphi(U)) \leq |\varphi(B)| \leq |B| = \dim(U)$. □

Definition 5.2.4. Es sei $\varphi \in L(V, V')$, dann heißt $\mathrm{Bild}(\varphi) = \varphi(V) = \{\varphi(\vec{a}) \ : \ \vec{a} \in V\}$ das Bild von φ. Die Menge $\mathrm{Kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{\vec{0}'\}) = \{\vec{a} \in V \ : \ \varphi(\vec{a}) = \vec{0}'\}$ heißt Kern von φ. Nach Satz 5.2.2 sind dies Unterräume von V' bzw. V. Ferner heißt $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$ der Rang und $\mathrm{def}(\varphi) = \dim(\mathrm{Kern}(\varphi))$ der Defekt von φ.

Beispiel 5.2.5. Wir betrachten die Projektion aus Beispiel 5.1.5: $V = \mathbb{R}^2$ und $\varphi(x, y) = (x, 0)$. Dann ist $\mathrm{Bild}(\varphi) = \{(x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$, d. h. $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$. Andererseits ist $\mathrm{Kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{(0, 0)\}) = \{\vec{a} \in V \ : \ \varphi(\vec{a}) = (0, 0)\} = \{(0, y) \ : \ y \in \mathbb{R}\}$, und somit $\mathrm{def}(\varphi) = 1$.

Satz 5.2.6. *Für* $\varphi \in L(V, V')$ *sind äquivalent:*

(a) φ *ist injektiv.*

(b) $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{\vec{0}\}$*, d. h.* $\mathrm{def}(\varphi) = 0$*.*

(c) *Sind* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$ *l.u., so auch* $\varphi(\vec{a}_1), \ldots, \varphi(\vec{a}_n)$*.*

Beweis.
(a)⇒(b):
Ist φ injektiv, so folgt aus $\varphi(\vec{a}) = \vec{0}' = \varphi(\vec{0})$ schon $\vec{a} = \vec{0}$.

(b)⇒(c):
Es sei $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{\vec{0}\}$, und $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$ l.u. gewählt. Aus $\lambda_1\varphi(\vec{a}_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(\vec{a}_n) = \vec{0}'$ folgt dann $\varphi(\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n) = \vec{0}'$, d. h.

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n \in \mathrm{Kern}(\varphi) = \{\vec{0}'\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 ,$$

da $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ l.u. sind.

(c)⇒(a):
Es seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in V$ mit $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2$, dann ist $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 \neq \vec{0}$ l.u., also nach (c) auch $\varphi(\vec{a}_1 - \vec{a}_2) = \varphi(\vec{a}_1) - \varphi(\vec{a}_2)$ l.u., und damit $\varphi(\vec{a}_1) \neq \varphi(\vec{a}_2)$. □

Satz 5.2.7 (Rangformel). *Es sei* $\varphi \in L(V, V')$ *mit* $\dim(V) < \infty$*. Dann gilt* $\mathrm{rg}(\varphi) + \mathrm{def}(\varphi) = \dim(V)$*, oder ausführlich*

$$\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) \;=\; \dim(V) .$$

Die beiden Extremfälle dieser Gleichheit sind

$$\begin{aligned} \mathrm{def}(\varphi) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(V) \\ \mathrm{rg}(\varphi) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Kern}(\varphi) = V . \end{aligned}$$

Beweis. Wir wählen eine Basis $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_r$ von Kern(φ) und ergänzen sie nach Satz 3.3.23 von Steinitz zu einer Basis $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_r, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s$ von V. Wir zeigen im Folgenden, dass

$$\varphi(V) \;=\; \left\langle\left\langle \varphi(\vec{b}_1), \ldots, \varphi(\vec{b}_s) \right\rangle\right\rangle$$

ist. Daraus folgt dann, dass $\mathrm{rg}(\varphi) + \mathrm{def}(\varphi) = r + s = \dim(V)$ ist, also die Behauptung.

<u>(a): $\varphi(\vec{b}_1), \ldots, \varphi(\vec{b}_s)$ sind l.u.:</u>
Es sei $\vec{0} = \lambda_1 \varphi(\vec{b}_1) + \cdots + \lambda_s \varphi(\vec{b}_s) = \varphi(\lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_s \vec{b}_s)$ mit $\lambda_i \in K$. Es folgt

$$\lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_s \vec{b}_s \in \mathrm{Kern}(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_s \vec{b}_s = \mu_1 \vec{a}_1 + \cdots + \mu_r \vec{a}_r \;\; (\text{mit } \mu_j \in K)\,.$$

Dann ist $\mu_1 \vec{a}_1 + \cdots + \mu_r \vec{a}_r + (-\lambda_1)\vec{b}_1 + \cdots + (-\lambda_s)\vec{b}_s = \vec{0}$, woraus $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = \mu_1 = \cdots = \mu_r = 0$ folgt, da $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_r, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s$ l.u. sind.

<u>(b): $\varphi(V) = \langle\, \varphi(\vec{b}_1), \ldots, \varphi(b_s)\, \rangle$:</u>
Es sei dazu $\vec{v}\,' \in \varphi(V)$, etwa $\vec{v}\,' = \varphi(\vec{v})$ für ein $\vec{v} \in V$. Dann ist

$$\vec{v} = \alpha \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_r \vec{a}_r + \beta_1 \vec{b}_1 + \cdots + \beta_s \vec{b}_S$$

mit $\alpha_i, \beta_j \in K$. Es folgt

$$\begin{aligned} \vec{v}\,' &= \varphi(\vec{v}) \;=\; \alpha_1 \varphi(\vec{a}_1) + \cdots + \alpha_r \varphi(\vec{a}_r) + \beta_1 \varphi(\vec{b}_1) + \cdots + \beta_s \varphi(\vec{b}_s) \\ &= \beta_1 \varphi(\vec{b}_1) + \cdots + \beta_s \varphi(\vec{b}_s) \;\in\; \left\langle \varphi(\vec{b}_1), \ldots, \varphi(\vec{b}_s) \right\rangle\,, \end{aligned}$$

denn es ist $\varphi(\vec{a}_i) = \vec{0}$ für die $\vec{a}_i \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. □

Satz 5.2.8. *Es sei $\varphi \in L(V, V')$, dann gilt:*

(a) *Ist* $\dim(V) < \infty$, *so gilt φ injektiv* $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(V)$.

(b) *Ist* $\dim(V) = \dim(V')$, *so gilt φ injektiv $\Leftrightarrow$ φ surjektiv.*

Beweis. Es gelten die Äquivalenzen

$$\varphi \text{ injektiv} \underset{\text{Satz 5.2.6}}{\Leftrightarrow} \mathrm{def}(\varphi) = 0 \underset{\text{Satz 5.2.7}}{\Leftrightarrow} \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(V) \quad \text{sowie}$$

$$\varphi \text{ injektiv} \underset{\text{(a)}}{\Leftrightarrow} \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(V) = \dim(V') \underset{\text{Satz 3.3.26(b)}}{\Leftrightarrow} \varphi(V) = V'\,.$$

□

5.3 Lineare Fortsetzung

Wir kommen nun zur Frage der Beschreibung linearer Abbildungen:

Satz 5.3.1. *Es sei $V = \langle\langle\, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \,\rangle\rangle$ und es seien $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n \in V'$ beliebige Vektoren. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi \in L(V, V')$ mit $\varphi(\vec{a}_j) = \vec{b}_j$ für $j = 1 \ldots n$ (d. h. eine lineare Abbildung ist schon völlig festgelegt, wenn ihre Werte auf einer Basis von V bekannt sind. Andererseits können diese Werte beliebig vorgeschrieben werden).*

Beweis.
Existenz:
Zu $\vec{v} \in V$ existieren eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n$. Die Abbildung φ wird dann durch $\varphi(\vec{a}) = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{b}_n$ definiert. Es bleibt, zu zeigen, dass φ linear ist. Dazu seien

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j \ , \quad \vec{w} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \vec{a}_j$$

aus V beliebig und $\alpha, \beta \in K$, dann ist

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} (\alpha\lambda_j + \beta\mu_j)\vec{a}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha\lambda_j + \beta\mu_j)\vec{b}_j \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{b}_j + \beta \sum_{j=1}^{n} \mu_j \vec{b}_j = \alpha\varphi(\vec{v}) + \beta\varphi(\vec{w}) \,. \end{aligned}$$

Eindeutigkeit:
Es sei $\psi \in L(V, V')$ mit $\psi(\vec{a}_j) = \vec{b}_j$ für $j = 1 \dots n$. Für jedes $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n$ muss dann gelten:

$$\psi(\vec{v}) = \lambda_1 \psi(\vec{a}_1) + \cdots + \lambda_n \psi(\vec{a}_n) = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{b}_n = \varphi(\vec{v}) \,,$$

also $\psi = \varphi$. □

Definition 5.3.2. Die durch die Zuordnung $\vec{a}_j \mapsto \vec{b}_j$ nach dem Satz eindeutig festgelegte lineare Abbildung $\varphi \in L(V, V')$ heißt lineare Fortsetzung dieser Zuordnung.

Satz 5.3.3. *Es seien V und V' endlichdimensionale Vektorräume über K, dann gilt*

$$V \cong V' \quad \Leftrightarrow \quad \dim(V) = \dim(V') \,.$$

Insbesondere ist also jeder n-dimensionale VR über K isomorph zum Standardraum K^n.

Beweis. Die Richtung „$\Rightarrow$“ folgt aus Satz 5.2.3. Zur Richtung „$\Leftarrow$“: Es sei $\dim(V) = \dim(V') = n \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ ist die Aussage trivial, andernfalls ist $V = \langle\langle\, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \,\rangle\rangle$ und $V' = \langle\langle\, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \,\rangle\rangle$. Wir definieren $\varphi \in L(V, V')$ als die lineare Fortsetzung der Zuordnung $\vec{a}_j \mapsto \vec{b}_j$ für $j = 1 \dots n$, und müssen nur noch die Bijektivität von φ zeigen. Ist $\vec{b} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{b}_n \in V'$ beliebig, so ist $\vec{b} = \varphi(\vec{a})$ für $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n \in V$ nach Definition von φ. Nach Satz 5.2.8(b) ist φ auch injektiv, und damit ein Isomorphismus. □

Satz 5.3.4. *Es seien $\varphi \in L(V, V')$ und $\psi \in L(V', V'')$, also $\psi \circ \varphi \in L(V, V'')$. Dann gilt*

$$\operatorname{rg}(\varphi) + \operatorname{rg}(\psi) - \dim(V') \ \leq\ \operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) \ \leq\ \min\{\operatorname{rg}(\varphi), \operatorname{rg}(\psi)\} \,.$$

Beweis. Die rechte Ungleichung folgt aus

$$\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) = \dim(\operatorname{Bild}(\psi \circ \varphi)) = \dim(\psi(\varphi(V))) \ \leq\ \begin{cases} \dim(\varphi(V)) & = & \operatorname{rg}(\varphi) \\ \dim(\psi(V')) & = & \operatorname{rg}(\psi) \end{cases} .$$

Für die linke Ungleichung betrachten wir die Abbildung $\psi^* = \psi|_{\varphi(V)}$, die Beschränkung von ψ auf den Unterraum $\varphi(V)$, also $\psi^* : \varphi(V) \to V''$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) &= \dim(\psi(\varphi(V))) \ =\ \dim(\psi^*(V)) \ =\ \operatorname{rg}(\psi^*) \\ &= \dim(\varphi(V)) - \operatorname{def}(\psi^*) \ \geq\ \dim(\varphi(V)) - \operatorname{def}(\psi) \ =\ \operatorname{rg}(\varphi) - (\dim(V') - \operatorname{rg}(\psi)) \end{aligned}$$

nach Satz 5.2.7. □

5.4 Lineare Abbildungen und Matrizen

Alle betrachteten Vektorräume seien endlichdimensional. Sei $\varphi \in L(V, V')$ eine lineare Abbildung von V nach V' und B bzw. B' Basen von V bzw. V'. Nach Satz 5.3.1 kann φ durch die Bilder der Vektoren aus B eindeutig beschrieben werden. Jedes dieser Bilder kann wiederum eindeutig als Linearkombination der Vektoren von B' ausgedrückt werden. Die Koeffizienten dieser Linearkombinationen sammeln wir nun in einer Matrix, die der Abbildung φ zugeordnet wird.

Definition 5.4.1. Es sei $\dim(V) = n < \infty$ sowie $\dim(V') = m < \infty$, $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von V sowie $B' = \{\vec{b}'_1, \ldots, \vec{b}'_m\}$ eine Basis von V'. Ferner sei $\varphi \in L(V, V')$. Wegen $\varphi(\vec{b}_l) \in V'$ gibt es eindeutig bestimmte $\alpha_{kl} \in K$ mit

$$\varphi(\vec{b}_l) \;=\; \alpha_{1l}\vec{b}'_1 + \cdots + \alpha_{ml}\vec{b}'_m \;=\; \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kl}\vec{b}'_k \quad (l = 1, \ldots, n)\,. \tag{$*$}$$

Es sei $\mathcal{M}(\varphi; B', B) = (\alpha_{kl})$ mit $1 \le k \le m$ und $1 \le l \le n$. $\mathcal{M}(\varphi; B', B)$ heißt die φ bzgl. der Basen B und B' zugeordnete Matrix (auch Darstellungsmatrix von φ bzgl. B und B').

Satz 5.4.2. *Mit den obigen Bezeichnungen sei*

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n \in V \;\;,\;\; \varphi(\vec{v}) = \lambda'_1\vec{b}'_1 + \cdots + \lambda'_n\vec{b}'_n \in V'\,.$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_m \end{pmatrix} = \mathcal{M}(\varphi; B', B) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{$**$}$$

Definition 5.4.3. Wir nennen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Koordinaten von $\vec{v}$ bzgl. B (entsprechend sind $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_m$ die Koordinaten von $\varphi(\vec{v})$ bzgl. B').

Beweis von Satz 5.4.2. Es ist

$$\varphi(\vec{v}) \;=\; \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \varphi(\vec{b}_l) \;\underset{(*)}{=}\; \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kl}\vec{b}'_k \;,\; \text{also}$$

$$\lambda'_k \;=\; \sum_{l=1}^{n} \alpha_{kl}\lambda_l \quad (k = 1, \ldots, m) \textit{ d. h.}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\lambda_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}\lambda_n \\ & & \vdots & & \\ \alpha_{m1}\lambda_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

□

Bemerkung 5.4.4. Die Matrix $\mathcal{M}(\varphi; B', B)$ lässt sich folgendermaßen einfach in Worten beschreiben: Nach $(*)$ besteht die l-te Spalte von $\mathcal{M}(\varphi; B', B)$ aus den Koordinaten des Bilds $\varphi(\vec{b}_l)$ des l-ten Basisvektors.

Wir betrachten jetzt die Matrizen, die einigen der im letzten Paragraphen als Beispiele aufgeführten linearen Abbildungen zugeordnet sind, sowie ein paar andere Beispiele.

Beispiel 5.4.5. Sei $\dim(V) = n$ und $\dim(V') = m$ und $\varphi_0 : V \to V'$ der triviale Homomorphismus. Dann ist bzgl. irgendwelcher Basen B und B' von V und V' stets $\mathcal{M}(\varphi_0; B', B) = 0^{(m,n)}$ die Nullmatrix.

Beispiel 5.4.6. Es sei $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(\vec{a}) = \lambda\vec{a}$ für festes $\lambda \in K$ und $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ irgend eine Basis von V. Die l-te Spalte von $\mathcal{M}(\varphi; B, B)$ besteht dann aus den Koordinaten $\varphi(\vec{b}_l) = \lambda\vec{b}_l$ bzgl. B, also

$$\mathcal{M}(\varphi; B, B) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\mathcal{E}_n .$$

Beispiel 5.4.7. Es sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(x, y) = (\lambda x, \mu y)$ die Eulerabbildung. Es sei $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ mit $\vec{e}_1 = (1, 0)$ und $\vec{e}_2 = (0, 1)$ die Standardbasis. Dann gilt $\varphi(\vec{e}_1) = \lambda\vec{e}_1$ sowie $\varphi(\vec{e}_2) = \mu\vec{e}_2$, also

$$\mathcal{M}(\varphi; B, B) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} .$$

Die Darstellungsmatrix hängt im Allgemeinen von der Wahl der Basen ab. Ist beispielsweise $\tilde{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ mit $\vec{b}_1 = (1, 1)$ und $\vec{b}_2 = (1, -1)$, so ist

$$\varphi(\vec{b}_1) = (\lambda, \mu) = \frac{\lambda + \mu}{2}\vec{b}_1 + \frac{\lambda - \mu}{2}\vec{b}_2 \ , \ \varphi(\vec{b}_2) = (\lambda, -\mu) = \frac{\lambda - \mu}{2}\vec{b}_1 + \frac{\lambda + \mu}{2}\vec{b}_2$$

und damit

$$\mathcal{M}(\varphi; \tilde{B}, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+\mu}{2} & \frac{\lambda-\mu}{2} \\ \frac{\lambda-\mu}{2} & \frac{\lambda+\mu}{2} \end{pmatrix} .$$

Eine der wichtigen Aufgaben der linearen Algebra ist es, zu einer gegebenen Abbildung φ Basen zu finden, bzgl. denen die Darstellungsmatrix besonders einfach wird:

Beispiel 5.4.8. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ versehen, und $\varphi \in L(V, V)$ die lineare Abbildung mit bzgl. B zugeordneter Matrix

$$\mathcal{M}(\varphi; B, B) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -3 \\ 8 & 4 & 9 \end{pmatrix} .$$

Wir betrachten die neue Basis $\tilde{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ mit

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \ , \ \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$\mathcal{M}(\varphi; B, B)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ \mathcal{M}(\varphi; B, B)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \ , \ \mathcal{M}(\varphi; B, B)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

also kurz $\varphi(\vec{b}_1) = \vec{b}_1$, $\varphi(\vec{b}_2) = 2\vec{b}_2$ und $\varphi(\vec{b}_3) = 3\vec{b}_3$. Bezüglich der Basis $\tilde{B}$ hat φ die einfache Diagonalmatrix

$$\mathcal{M}(\varphi; \tilde{B}, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

als Darstellungsmatrix. Die Abbildung φ streckt daher den $\mathbb{R}^3$ in den Richtungen von $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ um die Faktoren 1, 2 und 3. $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ nennt man die Eigenvektoren von φ mit zugehörigen Eigenwerten $1, 2, 3$.

Beispiel 5.4.9. Ist $\varphi \in L(V, V')$ ein Isomorphismus, so lassen sich die Basen B und B' von V und V' stets so wählen, dass $\mathcal{M}(\varphi; B', B) = \mathcal{E}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Nach Satz 5.3.3 ist nämlich $\dim(V) = \dim(V')$, und ist $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von V, so sind nach Satz 5.2.6 die Vektoren $\varphi(\vec{b}_1), \ldots, \varphi(\vec{b}_n)$ l.u., d. h. nach Satz 3.3.20 ist $B' = \{\varphi(\vec{b}_1), \ldots, \varphi(\vec{b}_n)\}$ eine Basis von V'. Offenbar ist dann $\mathcal{M}(\varphi; B', B) = \mathcal{E}_n$.

Beispiel 5.4.10. Es sei $\varphi \in L(K^n, K)$ mit

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

eine Linearform und $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ bzw. $B' = \{1\}$ die Standardbasen von K^n bzw. K, dann ist

$$\varphi(\vec{e}_i) \;=\; \varphi(0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{1}, 0, \ldots, 0) \;=\; a_i\;,$$

also ist die Darstellungsmatrix die Zeile $\mathcal{M}(\varphi; B', B) = (a_1, \ldots, a_n)$.

Beispiel 5.4.11. Es sei

$$V \;=\; \{p :\, \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; p \text{ Polynom vom Grad} \leq n\}$$

mit der Basis $B = \{1, x, \ldots, x^n\}$ und $\varphi :\, V \to V$ mit $\varphi(p) = p'$ die Ableitung, dann gilt:

$$\begin{array}{ccccl}
\varphi(1) & = & 0 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \cdots + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^n \\
\varphi(x) & = & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + \cdots + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^n \\
\varphi(x^2) & = & 2x & = & 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + \cdots + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^n \\
\vdots & & \vdots & & \qquad\qquad\quad \vdots \\
\varphi(x^n) & = & nx^{n-1} & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \cdots + n \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^n
\end{array}$$

und somit

$$\mathcal{M}(\varphi; B, B) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{(n+1, n+1)}\,.$$

Der nächste Satz besagt, dass lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen praktisch mit Matrizen identifiziert werden können:

Satz 5.4.12. *Es sei* $\dim(V) = n$ *und* $\dim(V') = m$*, dann gilt* $L(V, V') \cong K^{(m,n)}$*. Genauer: Ist* $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ *eine Basis von* V *sowie* $B' = \{\vec{b}'_1, \ldots, \vec{b}'_m\}$ *eine Basis von* V'*, so ist durch*

$$\Phi(\varphi) \;:=\; \mathcal{M}(\varphi; B', B) \;\; \textit{für}\, \varphi \in L(V, V')$$

ein Isomorphismus

$$\Phi :\; L(V, V') \;\longrightarrow\; K^{(m,n)}$$

gegeben. Insbesondere ist $\dim(L(V, V')) = \dim(K^{(m,n)}) = m \cdot n$*. Der inverse Isomorphismus*

$$\Phi^{-1} :\; K^{(m,n)} \;\longrightarrow\; L(V, V')$$

ist gegeben durch

$$\Phi^{-1}(\mathcal{A}) \;=\; \varphi_{\mathcal{A}} \;\;,\;\; \varphi_{\mathcal{A}}(\lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{b}_n) = \lambda'_1 \vec{b}'_1 + \cdots + \lambda'_m \vec{b}'_m \;\;,\;\; \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_m \end{pmatrix} \;=\; \mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}\,.$$

Beweis. Man rechnet leicht nach, dass die Abbildung Φ linear ist. Φ ist injektiv: Es sei $\varphi \in \mathrm{Kern}(\Phi)$, d. h. $\mathcal{M}(\varphi; B', B) = 0^{(m,n)}$. Dann ist nach Satz 5.4.2 $\varphi(\vec{v}) = \vec{0}'$ für alle $\vec{v} \in V$, d. h. φ ist der Nullvektor von $L(V, V')$, also $\mathrm{Kern}(\Phi) = \{0\}$ und Φ ist injektiv nach Satz 5.2.6. Φ ist surjektiv: Es sei $\mathcal{A} \in K^{(m,n)}$, dann wird $\varphi_{\mathcal{A}}$ wie im Satz definiert: für $\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{b}_n \in V$ sei

$$\varphi_{\mathcal{A}}(\vec{v}) \; := \; \lambda_1' \vec{b}_1' + \cdots + \lambda_m' \vec{b}_m' \;\text{ mit }\; \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_m' \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Dann ist $\varphi_{\mathcal{A}} \in L(V, V')$ und $\Phi(\varphi_{\mathcal{A}}) = \mathcal{M}(\varphi_{\mathcal{A}}; B', B) = \mathcal{A}$. Gleichzeitig ergibt sich die angegebene Formel für Φ^{-1}. □

Wir geben nun die angekündigte Erklärung für die komplizierte Definition des Matrizenprodukts. Der Komposition von Abbildung entspricht die Multiplikation der zugehörigen Matrizen:

Satz 5.4.13. *Es seien V, V', V'' endlichdimensionale VR mit Basen B, B', B''. Für $\varphi \in L(V, V')$ und $\psi \in L(V', V'')$ gilt dann:*

$$\mathcal{M}(\psi \circ \varphi; B'', B) \; = \; \mathcal{M}(\psi; B'', B') \cdot \mathcal{M}(\varphi; B', B) .$$

Beweis. Es sei $\dim(V) = n$, $\dim(V') = m$ und $\dim(V'') = p$ sowie $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$, $B' = \{\vec{b}_1', \ldots, \vec{b}_m'\}$ und $B'' = \{\vec{b}_1'', \ldots, \vec{b}_p''\}$. Wir definieren die Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ durch

$$\mathcal{M}(\varphi; B', B) = \mathcal{A} = (\alpha_{kl}) \quad , \quad 1 \le k \le m, 1 \le l \le n \;\; , \;\; \varphi(\vec{b}_l) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kl} \vec{b}_k' \; (l = 1 \ldots m) \, ,$$

$$\mathcal{M}(\psi; B'', B') = \mathcal{B} = (\beta_{kl}) \quad , \quad 1 \le k \le p, 1 \le l \le m \;\; , \;\; \psi(\vec{b}_k') = \sum_{j=1}^{p} \beta_{jk} \vec{b}_j'' \; (k = 1 \ldots m) \, .$$

Dann ist

$$(\psi \circ \varphi)(\vec{b}_l) \;=\; \psi(\varphi(\vec{b}_l)) = \psi\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{kl} \vec{b}_k'\right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kl} \psi(\vec{b}_k') = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kl} \sum_{j=1}^{p} \beta_{jk} \vec{b}_j'' = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} \beta_{jk} \alpha_{kl}\right) \vec{b}_j''$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M}(\psi \circ \varphi; B'', B) \; = \; \left(\sum_{k=1}^{m} \beta_{jk} \alpha_{kl}\right)_{\substack{1 \le j \le p \\ 1 \le l \le n}} \; = \; \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} .$$

□

Die Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation von Satz 4.1.10 ergeben sich aus Satz 5.4.13 unmittelbar, da sie für die Komposition von linearen Abbildungen erfüllt sind.

Bemerkung 5.4.14. Der Endomorphismenring $(L(V, V), +, \circ)$ aus Satz 5.1.11 ist mit dem Matrizenring $K^{(n,n)}$ aus Satz 4.1.12 eng verwandt. Für die in Satz 5.4.12 definierte bijektive Abbildung $\Phi : \; L(V, V) \to K^{(n,n)}$ gilt

$$\Phi(\varphi + \psi) = \Phi(\varphi) + \Phi(\psi) \quad , \quad \Phi(\varphi \circ \psi) = \Phi(\varphi) \cdot \Phi(\psi) .$$

Eine solche Abbildung zwischen Ringen heißt Ringisomorphismus.

Satz 5.4.15. *Es seien V, V' endlichdimensionale VR mit Basen B, B' und $\varphi \in L(V, V')$, dann gilt* $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(\mathcal{M}(\varphi; B', B))$. *Insbesondere hängt der Rang von $\mathcal{M}(\varphi; B', B)$ also nicht von der Wahl der Basen B, B' ab.*

Beweis. Es sei $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ und $B' = \{\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_m\}$ sowie $\mathcal{M}(\varphi; B', B) = \mathcal{A} = (\alpha_{kl})$ mit $1 \le k \le m$ bzw. $1 \le l \le n$. Für $l = 1 \dots n$ ist

$$\varphi(\vec{b}_l) \;=\; \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kl} \vec{b}'_k \,,$$

d. h. der l-te Spaltenvektor

$$\vec{a}_l \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_{1l} \\ \vdots \\ \alpha_{ml} \end{pmatrix}$$

von $\mathcal{A}$ ist der Koordinatenvektor von $\varphi(\vec{b}_l)$ bzgl. der Basis B'. Wir zeigen für $1 \le l_1 < l_2 < \ldots < l_r \le n$ die Äquivalenz

$$\varphi(\vec{b}_{l_1}), \dots, \varphi(\vec{b}_{l_r}) \text{ l.u.} \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_{l_1}, \dots, \vec{a}_{l_r} \text{ l.u.}\,. \tag{$*$}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{0} \;=\; \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \varphi(\vec{b}_{l_j}) \;=\; \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{kl_j} \vec{b}'_k \right) \;&\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kl_j} \lambda_j = 0 \text{ für } k = 1, \dots, m \;\; (\text{da } \vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_m \text{ l.u.}) \\ &\Leftrightarrow\; \lambda_1 \vec{a}_{l_1} + \dots + \lambda_r \vec{a}_{l_r} \;=\; \vec{0}\,.\end{aligned}$$

Damit ist $(*)$ bewiesen. Es folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(\varphi) \;&=\; \dim(\varphi(V)) \;=\; \dim(\langle\, \varphi(\vec{b}_1), \dots, \varphi(\vec{b}_n) \,\rangle) \\ &=\; \text{Maximalzahl von l.u. Vektoren unter den } \varphi(\vec{b}_1), \dots, \varphi(\vec{b}_n) \\ &=\; \text{Maximalzahl von l.u. Vektoren unter den } \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \\ &=\; \text{Spaltenrang von } \mathcal{A} \;=\; \mathrm{rg}(\mathcal{A})\,.\end{aligned}$$

□

Satz 5.4.16. *Es sei* $\dim(V) = \dim(V') = n$ *und B, B' Basen von V bzw. V', sowie $\varphi \in L(V, V')$, dann gilt*

$$\varphi \textit{ bijektiv} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M}(\varphi; B', B) \textit{ regulär}\,.$$

In diesem Falle ist $\mathcal{M}(\varphi^{-1}; B, B') = \mathcal{M}(\varphi; B', B)^{-1}$.

Beweis. Es gilt

$$\varphi \text{ bijektiv} \underset{5.2.8(\mathrm{b})}{\Leftrightarrow} \varphi \text{ surjektiv} \underset{3.3.26}{\Leftrightarrow} \mathrm{rg}(\varphi) = n \underset{5.4.15}{\Leftrightarrow} \mathrm{rg}(\mathcal{M}(\varphi; B', B)) = n\,.$$

Und nach Satz 5.4.13 ist

$$\mathcal{M}(\varphi^{-1}; B, B') \cdot \mathcal{M}(\varphi; B', B) \;=\; \mathcal{M}(\varphi^{-1} \circ \varphi; B, B) \;=\; \mathcal{M}(\mathrm{id}_V; B, B) \;=\; \mathcal{E}_n\,.$$

□

Bemerkung 5.4.17. Die Abbildung $\Phi: \; L(V, V) \to K^{(n,n)}$ mit $\Phi(\varphi) = \mathcal{M}(\varphi; B, B)$ bildet daher die Automorphismengruppe von V bijektiv auf die Gruppe der regulären Matrizen in $K^{(n,n)}$ ab, und es gilt $\Phi(\varphi \circ \psi) = \Phi(\varphi) \cdot \Phi(\psi)$, d. h. Φ ist ein Gruppenisomorphismus.

Satz 5.4.18. *Für Matrizen $\mathcal{A} \in K^{(m,n)}$ und $\mathcal{B} \in K^{(n,p)}$ gilt*

$$\operatorname{rg}(\mathcal{A}) + \operatorname{rg}(\mathcal{B}) - n \ \le\ \operatorname{rg}(\mathcal{AB}) \ \le\ \min(\operatorname{rg}(\mathcal{A}), \operatorname{rg}(\mathcal{B}))\ .$$

Beweis. Wähle Vektorräume V, V', V'' mit Dimensionen p, n, m und Basen B, B', B''. Nach Satz 5.3.1 gibt es $\varphi \in L(V, V')$, $\psi \in L(V', V'')$ mit $\mathcal{M}(\varphi; B', B) = \mathcal{B}$ und $\mathcal{M}(\psi; B'', B') = \mathcal{A}$, also nach Satz 5.4.13 $\mathcal{A}(\psi \circ \varphi; B'', B) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$. Nach Satz 5.4.15 ist $\operatorname{rg}(\mathcal{A}) = \operatorname{rg}(\psi)$, $\operatorname{rg}(\mathcal{B}) = \operatorname{rg}(\varphi)$ und $\operatorname{rg}(\mathcal{AB}) = \operatorname{rg}(\psi \circ \varphi)$., so dass die Behauptung aus Satz 5.3.4 folgt. $\square$

Satz 5.4.19. *Es sei $\mathcal{A} \in K^{(m,n)}$ beliebig, und es seien $\mathcal{X} \in K^{(m,m)}$ bzw. $\mathcal{Y} \in K^{(n,n)}$ regulär. Dann ist $\operatorname{rg}(\mathcal{XA}) = \operatorname{rg}(\mathcal{AY}) = \operatorname{rg}(\mathcal{A})$, d. h. Multiplikationen mit regulären Matrizen ändern den Rang einer Matrix nicht.*

Beweis. Nach Satz 5.4.18 gilt

$$\operatorname{rg}(\mathcal{XA}) \quad \begin{cases} \le \ \min(\operatorname{rg}(\mathcal{X}), \operatorname{rg}(\mathcal{A})) & = \ \operatorname{rg}(\mathcal{A}) \quad \text{da } \operatorname{rg}(\mathcal{A}) \le m = \operatorname{rg}(\mathcal{X})\ , \\ \ge \ \operatorname{rg}(\mathcal{X}) + \operatorname{rg}(\mathcal{A}) - m & = \ \operatorname{rg}(\mathcal{A}) \quad \text{da } \operatorname{rg}(\mathcal{X}) = m \qquad\qquad . \end{cases}$$

$$\operatorname{rg}(\mathcal{AY}) \quad \begin{cases} \le \ \min(\operatorname{rg}(\mathcal{A}), \operatorname{rg}(\mathcal{Y})) & = \ \operatorname{rg}(\mathcal{A}) \quad \text{da } \operatorname{rg}(\mathcal{A}) \le n = \operatorname{rg}(\mathcal{Y})\ , \\ \ge \ \operatorname{rg}(\mathcal{A}) + \operatorname{rg}(\mathcal{Y}) - n & = \ \operatorname{rg}(\mathcal{A}) \quad \text{da } \operatorname{rg}(\mathcal{Y}) = n \qquad\qquad . \end{cases}$$

$\square$

5.5 Basiswechsel

Wir untersuchen nun, wie sich die Koordinaten eines Vektors $\vec{v} \in V$ beim Wechsel der Basis des Vektorraums V ändern. Außerdem untersuchen wir die damit eng verwandte Frage, wie sich die zu einer Abbildung $\varphi \in L(V, V')$ bzgl. der Basen B, B' gehörende Matrix $\mathcal{M}(\varphi; B', B)$ ändert, wenn die Basen B, B' durch andere Basen ersetzt werden. Zunächst beweisen wir einen Satz über die Gesamtheit aller Basen eines Vektorraums:

Satz 5.5.1. *Es sei $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von V und $\varphi \in L(V, V)$. Genau dann ist $\tilde{B} = \{\varphi(\vec{b}_1), \ldots, \varphi(\vec{b}_n)\}$ eine Basis von V, wenn φ ein Automorphismus ist.*

Beweis.

$$\tilde{B} \text{ Basis} \ \Leftrightarrow\ \varphi(\vec{b}_1), \ldots, \varphi(\vec{b}_n) \text{ l.u.} \ \Leftrightarrow\ \operatorname{rg}(\varphi) = n \ \Leftrightarrow\ \varphi \text{ Automorphismus}\,.$$

$\square$

Bemerkung 5.5.2. Es besteht also eine umkehrbar eindeutige Entsprechung zwischen

1. den Automorphismen von V,
2. den Basistransformationen von V,
3. den regulären $(n \times n)$-Matrizen über K.

Satz 5.5.3. *Es seien $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ und $B' = \{\vec{b}'_1, \ldots, \vec{b}'_n\}$ Basen von V und $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ ein Automorphismus. Dann gilt $\mathcal{M}(\varphi; B', B) = \mathcal{M}(\mathrm{id}_V; B', \varphi(B))$ mit $\varphi(B) = \{\varphi(\vec{b}_1), \ldots, \varphi(\vec{b}_n)\}$.*

Beweis. Die Menge $\varphi(B)$ ist nach Satz 5.5.1 eine Basis von V. Beide Matrizen sind $= (\alpha_{kl})$ mit $1 \leq k \leq n$ bzw. $1 \leq l \leq n$, mit

$$\varphi(\vec{b}_l) \;=\; \mathrm{id}_V(\varphi(\vec{b}_l)) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kl} \vec{b}'_k \quad (l = 1, \ldots, n)\,.$$

□

Satz 5.5.4. *Es seien $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ und $\varphi(B) = \{\varphi(\vec{b}_1), \ldots, \varphi(\vec{b}_n)\}$ Basen von V für $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bzw. $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ die Koordinaten von $\vec{v}$ bzgl. B bzw. bzgl. $\varphi(B)$, d. h. gilt*

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{b}_n \;\; \textit{bzw.} \;\; \vec{v} = \lambda'_1 \varphi(\vec{b}_1) + \cdots + \lambda'_n \varphi(\vec{b}_n)\,,$$

so ist

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} \;=\; \mathcal{M}(\varphi; B, B)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}\,.$$

Beweis. Nach Satz 5.4.2 gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} \;=\; \mathcal{M}(\mathrm{id}_V; \varphi(B), B)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}\,. \qquad (*)$$

Nach Satz 5.4.13 ist andererseits

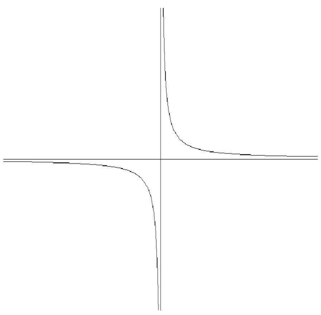
$$\mathcal{E}_n \;=\; \mathcal{M}(\mathrm{id}_V; B, B) = \mathcal{M}(\mathrm{id}_V; B, \varphi(B)) \cdot \mathcal{M}(\mathrm{id}_V; \varphi(B), B)$$

also $\mathcal{M}(\mathrm{id}_V; \varphi(B), B) = \mathcal{M}(\mathrm{id}_V; B, \varphi(B))^{-1}$ und daher nach Satz 5.5.3

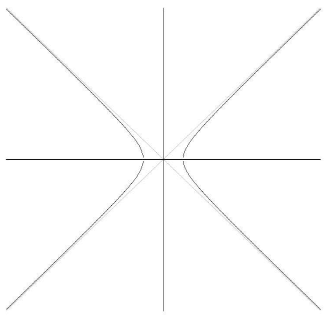
$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_V; \varphi(B), B) \;=\; \mathcal{M}(\varphi; B, B)^{-1}\,.$$

Daraus und aus $(*)$ folgt die Behauptung. □

Beispiel 5.5.5. Im Geometrieunterricht begegnet man der Hyperbel in zwei Formen als Kurven. Die Kurven in der xy-Ebene mit den Gleichungen

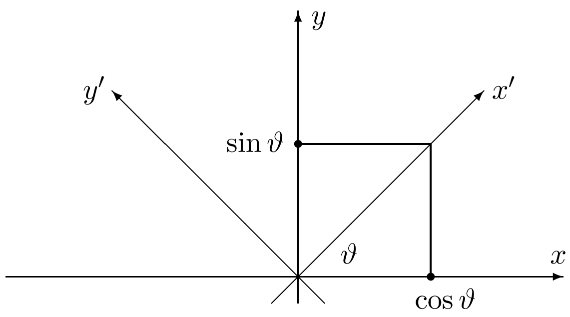


(I) $xy = a$ $(a > 0)$



(II) $x^2 - y^2 = b$ $(b > 0)$

werden jeweils als Hyperbeln bezeichnet. Woher wissen wir, ob durch die Gleichungstypen (I) und (II) kongruente Kurven beschrieben werden? Die Skizzen legen die Vermutung nahe, dass Kurven vom Typ (II) durch eine Drehung um 45° (im Gegenuhrzeigersinn) in Kurven des Typs (I) übergeführt werden. Zum Beweis dieser Vermutung drehen wir das xy-Koordinatensystem um 45° in das $x'y'$-Koordinatensystem und untersuchen die Gleichung der Kurve $xy = a$ in $x'y'$-Koordinaten. Zunächst leiten wir die Transformationsgleichungen für eine Drehung des Koordinatensystems um einen Winkel ϑ im Uhrzeigersinn her.



Die x'-Achse wird aufgespannt vom Vektor $\vec{b}_1 = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, die y'-Achse von $\vec{b}_2 = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta)$. Während die xy-Koordinaten die Koeffizienten $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ in der Darstellung $\vec{v} = (x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ sind, sind die $x'y'$-Koordinaten von $\vec{v}$ die Koeffizienten x',y' in der Darstellung $\vec{v} = x'\vec{b}_1 + y'\vec{b}_2$. Die Matrix der <u>Drehung</u> $\varphi \in L'(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, die $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ in $B' = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ überführt, ist

$$\mathcal{M}(\varphi; B', B) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

daher ist nach Satz 5.5.4

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{cases} x = (\cos\vartheta)x' - (\sin\vartheta)y' \\ y = (\sin\vartheta)x' + (\cos\vartheta)y' \end{cases}.$$

Für $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ (=45°) erhalten wir $\sin\vartheta = \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, daher ist $xy = a$ äquivalent zu $\frac{1}{2}(x'-y')(x'+y') = a$ oder $x'^2 - y'^2 = 2a$. Die Kurve $xy = a$ geht daher aus der Kurve $x^2 - y^2 = 2a$ durch eine Drehung um 45° hervor. Die Gleichungen (I) und (II) stellen in der Tat kongruente Kurven dar, falls $b = 2a$ ist.

Satz 5.5.6. *Es seien* $\dim(V), \dim(V') < \infty$ *und* B *bzw.* B' *Basen von* V *bzw.* V', *sowie* $\varrho \in \mathrm{GL}(B)$ *bzw.* $\sigma \in \mathrm{GL}(V')$. *Sei* $\mathcal{X} = \mathcal{M}(\varrho; B, B)$ *und* $\mathcal{Y} = \mathcal{M}(\sigma; B', B')$. *Dann gilt für alle* $\varphi \in L(V, V')$:

$$\mathcal{M}(\varphi; \sigma(B'), \varrho(B)) = \mathcal{Y}^{-1} \cdot \mathcal{M}(\varphi; B', B) \cdot \mathcal{X}.$$

Beweis. Nach Satz 5.4.13 gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\varphi; \sigma(B'), \varrho(B)) &= \mathcal{M}(\mathrm{id}_{V'} \circ \varphi \circ \mathrm{id}_V; \sigma(B'), \varrho(B)) \\ &= \mathcal{M}(\mathrm{id}_{V'} \circ \varphi; \sigma(B'), B) \cdot \mathcal{M}(\mathrm{id}_V; B, \varrho(B)) \\ &= \mathcal{M}(\mathrm{id}_{V'}; \sigma(B'), B') \cdot \mathcal{M}(\varphi; B', B) \cdot \mathcal{M}(\mathrm{id}_V; B, \varrho(B)). \end{aligned}$$

Nach Satz 5.5.3 folgt

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_{V'}; \sigma(B'), B') = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{V'}; B', \sigma(B'))^{-1} = \mathcal{M}(\sigma; B', B')^{-1} = \mathcal{Y}^{-1}$$

und ebenso

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_V; B, \varrho(B)) = \mathcal{M}(\varrho; B, B) = \mathcal{X}\,.$$

Damit ergibt sich die Behauptung. □

Wir erhalten als Spezialfall

Satz 5.5.7 (Basiswechsel für lineare Abbildungen). *Es sei* $\dim(V) < \infty$*,* $\sigma \in \mathrm{GL}(V)$ *und* B *eine Basis von* V*. Dann gilt für alle* $\varphi \in L(V, V)$*:*

$$\mathcal{M}(\varphi; \sigma(B), \sigma(B)) \;=\; \mathcal{X}^{-1} \cdot \mathcal{M}(\varphi; B, B) \cdot \mathcal{X} \;\; \textit{mit} \;\; \mathcal{X} = \mathcal{M}(\sigma; B, B)\,.$$

Beispiel 5.5.8. Im Beispiel 5.4.8 betrachteten wir die lineare Abbildung $\varphi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit bzgl. $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ zugeordneter Matrix

$$\mathcal{M}(\varphi; B, B) \;=\; \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -3 \\ 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachteten die neue Basis $\tilde{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ mit

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;,\; \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \;,\; \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\tilde{B} = \sigma(B)$ mit

$$\mathcal{X} \;=\; \mathcal{M}(\sigma; B, B) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Außerdem war

$$\mathcal{M}(\varphi; \tilde{B}, \tilde{B}) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Satz 5.5.7 sagt uns daher, dass

$$\mathcal{X}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -3 \\ 8 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{X} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ist, was man durch Nachrechnen bestätigt. Wir haben die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -3 \\ 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

<u>diagonalisiert</u>. Im Kapitel über Eigenwerte werden wir das Verfahren zur Diagonalisierung beschreiben.

Ein Wichtiger Spezialfall von $L(V, V')$ ist

Definition 5.5.9. Der <u>Dualraum</u> eines K-Vektorraums V ist $V^* = L(V, K)$, die $\varphi \in V^*$ nennt man <u>Linearformen</u> (im Fall $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ auch <u>lineare Funktionale</u>).

Satz 5.5.10. *Es sei* $\dim(V) = n < \infty$, *dann ist* $V^* \cong V$. *Ist* $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ *eine Basis von* V, *so gibt es zu jedem* $\varphi \in V^*$ *eindeutig bestimmte* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ *mit*

$$\varphi(\vec{v}) \;=\; \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n \;\textit{ für }\; \vec{v} \;=\; \lambda_1\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n\,.$$

Die Abbildung $\Psi :\ V^* \to K^n$, $\varphi \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach Satz 5.4.12 ist $\dim(V^*) = n \cdot 1 = \dim(V)$, also $V^* \cong V$ nach Satz 5.3.3. Bzgl. der Basis $\{1\}$ von K ist $\mathcal{M}(\varphi; \{1\}, B) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^{(1\times n)}$, also nach Satz 5.4.2

$$\varphi(\vec{v}) \;=\; (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \cdot 1 \;\text{ für }\; \vec{v} \;=\; \lambda_1\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n\,.$$

Die Linearität und Bijektivität der Abbildung Ψ prüft man leicht durch Nachrechnen. $\square$

Kapitel 6

Lineare Gleichungen

Es sei K stets ein Körper.

6.1 Theorie der Linearen Gleichungen

Definition 6.1.1. Es seien $\alpha_{kl}, \beta_k \in K$ für $k = 1, \ldots, m$ und $l = 1, \ldots, n$. Man bezeichnet

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & = & b_1 \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \alpha_{m2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{$*$}$$

als ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ und Koeffizienten $\alpha_{kl} \in K$. Man nennt $\mathcal{A} = (\alpha_{kl}) \in K^{(m,n)}$ die Koeffizientenmatrix, und

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

die rechte Seite des Systems $(*)$. Fügt man zu $\mathcal{A}$ als $(n+1)$-te Spalte $\vec{b}$ hinzu, so erhält man die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathcal{A}|\vec{b}) \in K^{(m,n+1)}$ des LGS $(*)$.

Fasst man die Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ zu einem Spaltenvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

zusammen, so lässt sich $(*)$ kürzer als Matrixgleichung

$$\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b} \tag{$**$}$$

schreiben. Jedes $\vec{x} \in K^n$ derart, dass $(*)$ bzw. $(**)$ gilt, heißt eine Lösung des LGS; gibt es ein solches $\vec{x}$, so heißt $(*)$ lösbar, sonst unlösbar. Ist $\vec{b} = \vec{0}$, so heißt das LGS homogen, sonst inhomogen, in diesem Fall nennt man $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{0}$ das zu $(**)$ gehörende homogene LGS. Ein homogenes LGS besitzt immer die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$. Es erheben sich folgende Fragen:

1. Unter welchen Bedingungen an $\mathcal{A}, \vec{b}$ ist $(*)$ lösbar?
2. Wie sieht die Lösungsmenge von $(*)$ aus?
3. Gibt es ein Verfahren, die Lösungsmenge zu berechnen?

Für eine individuell gegebene rechte Seite $\vec{b}$ hat man das Kriterium

Satz 6.1.2. *Es gilt:* $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b}$ *lösbar* $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg}(\mathcal{A}|\vec{b}) = \operatorname{rg}(\mathcal{A})$.

Beweis. Das System $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar genau dann, wenn $\vec{b}$ eine Linearkombination der Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ von $\mathcal{A}$ ist, und es gilt

$$\begin{aligned} \vec{b} \in \langle\, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \,\rangle \quad &\Leftrightarrow \quad \langle\, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b} \,\rangle = \langle\, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \,\rangle \;\Leftrightarrow\; \dim(\langle\, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b} \,\rangle) = \dim(\langle\, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \,\rangle) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Spaltenrang von } (\mathcal{A}|\vec{b}) \;=\; \text{Spaltenrang von } \mathcal{A} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg}(\mathcal{A}|\vec{b}) = \operatorname{rg}(\mathcal{A})\,. \end{aligned}$$

□

Betrachtung mehrerer rechter Seiten führt auf folgende Begriffe:

Definition 6.1.3. Ein LGS $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b}$ mit $\mathcal{A} \in K^{(m,n)}$ heißt universell lösbar, wenn $(*)$ für jede rechte Seite $\vec{b} \in K^m$ lösbar ist, eindeutig Lösbar, wenn $(*)$ für jede rechte Seite $\vec{b}$ höchstens eine (eventuell keine) Lösung $\vec{x} \in K^n$ besitzt.

Satz 6.1.4. *Ein LGS* $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b}$ *mit* $\mathcal{A} \in K^{(m,n)}$ *ist*

(i) *Universell lösbar* $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg}(\mathcal{A}) = m$.

(ii) *Eindeutig lösbar* $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg}(\mathcal{A}) = n$.

Beweis. Betrachte $\varphi \in L(K^n, K^m)$ mit $\varphi(\vec{x}) = \mathcal{A}\vec{x}$. Dann gilt:

$$\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b} \text{ universell lösbar} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ surjektiv, d. h. } \varphi(K^n) = K^m \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg}(\mathcal{A}) = \operatorname{rg}(\varphi) = \dim(K^m) = m\,.$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\vec{x} = \vec{b} \text{ eindeutig lösbar} \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi \text{ injektiv} \underset{5.2.6}{\Leftrightarrow} \operatorname{Kern}(\varphi) = \{\vec{0}\} \\ &\underset{5.2.7}{\Leftrightarrow} \quad 0 = \operatorname{def}(\varphi) = \dim(K^n) - \operatorname{rg}(\varphi) = n - \operatorname{rg}(\mathcal{A}) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg}(\mathcal{A}) = n\,. \end{aligned}$$

□

Satz 6.1.5. *Ein LGS* $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b}$ *mit* $\mathcal{A} \in K^{(m,n)}$ *ist genau dann universell und eindeutig lösbar, wenn* $m = n = \operatorname{rg}(\mathcal{A})$ *ist, d. h. wenn* $\mathcal{A}$ *quadratisch und regulär ist. Für ein LGS der Form* $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b}$ *mit* $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$ *(d. h. Anzahl der Unbekannten=Anzahl der Gleichungen) gilt:*

$$\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b} \textit{ universell lösbar} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}\vec{x} = \vec{b} \textit{ eindeutig lösbar}\,.$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Satz 6.1.4. □

Satz 6.1.6. *Die Lösungsmenge* $H = \left\{\vec{x} \in K^n \;:\; \mathcal{A}\vec{x} = \vec{0}\right\}$ *eines homogenen LGS mit* $\mathcal{A} \in K^{(m,n)}$ *ist ein Unterraum des* K^n *der Dimension* $\dim(H) = n - \operatorname{rg}(\mathcal{A})$.

Beweis. Es ist $H = \operatorname{Kern}(\varphi)$ mit $\varphi : \vec{x} \mapsto \mathcal{A}\vec{x}$, also nach 5.2.7 $\dim(H) = n - \operatorname{rg}(\varphi) = n - \operatorname{rg}(\mathcal{A})$. □

Um die Lösungsmenge eines inhomogenen LGS beschreiben zu können, führen wir den Begriff der linearen Mannigfaltigkeit ein:

Definition 6.1.7. Eine Teilmenge M eines Vektorraums V heißt eine lineare Mannigfaltigkeit (oder auch affiner Unterraum) der Dimension m, wenn sie geschrieben werden kann als

$$M \;=\; \{\vec{v}_0 + \vec{u} \;:\; \vec{u} \in U\}$$

für ein festes $\vec{v}_0 \in V$ und einen Untervektorraum U von V mit $\dim(U) = m$.

Satz 6.1.8. *Der VR U ist durch M eindeutig bestimmt, d. h. ist*

$$M \;=\; \{\vec{v}_0 + \vec{u} \;:\; \vec{u} \in U_0\} \;=\; \{\vec{v}_1 + \vec{u} \;:\; \vec{u} \in U_1\}\,,$$

so ist $U_0 = U_1$. Für $\vec{v}_0$ kann jeder Vektor aus M genommen werden.

Beweis. Sei $\vec{u}_0 \in U_0$, dann gilt $\vec{v}_0 + \vec{u}_0 = \vec{v}_1 + \vec{u}_1$ mit gewissen $\vec{v}_1 \in M$ und $\vec{u}_1 \in U_1$. Da $\vec{v}_0 = \vec{v}_0 + \vec{0} \in M$ gilt ist $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{w}_1$ mit $\vec{w}_1 \in U_1$, also

$$\vec{v}_0 + \vec{u}_0 = \vec{v}_1 + \vec{w}_1 + \vec{u}_0 = \vec{v}_1 + \vec{u}_1 \;\Rightarrow\; \vec{u}_0 = \vec{u}_1 - \vec{w}_1 \in U_1$$

und somit $U_0 \subseteq U_1$. Genauso folgt $U_1 \subseteq U_0$, also $U_0 = U_1$. Sei nun $\vec{v}_0' \in M$, dann ist

$$\vec{v}_0' = \vec{v}_0 + \vec{u}' \text{ (mit } \vec{u}' \in U) \;\;\Rightarrow\;\; M = \{\vec{v}_0 + \vec{u} \;:\; \vec{u} \in U\} = \left\{\vec{v}_0' + \vec{u} \;:\; \vec{u} \in U\right\}.$$

□

Beispiel 6.1.9. Den ersten Beispielen sind wir in der Einleitung begegnet: Die Geraden im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$, die geschrieben werden können als $\{\vec{a} + t\vec{b} \;:\; t \in \mathbb{R}\}$ (mit $\vec{b} \neq 0$) bzw. die Ebenen im $\mathbb{R}^3$ $\{\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \;:\; s,t \in \mathbb{R}\}$ (mit $\vec{b}, \vec{c}$ l.u.) sind eindimensionale bzw. zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.

Satz 6.1.10. *Eine lineare Mannigfaltigkeit eines VR V ist genau dann ein Untervektorraum von V, wenn sie den Nullvektor enthält.*

Beweis. Die Richtung M Untervektorraum $\Rightarrow$ $\vec{0} \in M$ ist klar. Andererseits gilt für $\vec{0} \in M$ nach Satz 6.1.8 $M = \{\vec{0} + \vec{u} \;:\; \vec{u} \in U\} = U$. □

Satz 6.1.11. *Sind M und N lineare Mannigfaltigkeiten von V mit $\dim(N) < \infty$ und $M \subseteq N$, so ist $\dim(M) \leq \dim(N)$. Es gilt dann $\dim(M) = \dim(N) \;\Leftrightarrow\; M = N$.*

Beweis. Es sei $\vec{v}_0 \in M$, dann gilt nach Satz 6.1.8: $M = \{\vec{v}_0 + \vec{u} \;:\; \vec{u} \in U_0\}$ und $N = \{\vec{v}_0 + \vec{u} \;:\; \vec{u} \in U_1\}$ mit gewissen Untervektorräumen U_0, U_1 von V. Es folgt $U_0 \subseteq U_1$, und die Restbehauptung folgt aus Satz 3.3.26. □

Satz 6.1.12. *Ist $\varphi \in L(V, V')$ mit $\dim(V), \dim(V') < \infty$, und M eine lineare Mannigfaltigkeit in V, so ist $\varphi(M) = \{\varphi(\vec{v}) \;:\; \vec{v} \in M\}$ eine lineare Mannigfaltigkeit in V'. Ist φ ein Isomorphismus, so ist $\dim(M) = \dim(\varphi(M))$.*

Beweis. Es ist $\varphi(M) = \{\varphi(\vec{v}_0) + \varphi(\vec{u}) \;:\; \vec{u} \in U\} = \{\varphi(\vec{v}_0) + \vec{w} \;:\; \vec{w} \in \varphi(U)\}$. □

Wir beschreiben nun die Lösungsmenge des inhomogenen LGS:

Satz 6.1.13. *Ist das LGS*

$$\mathcal{A}\vec{x} \;=\; \vec{b} \;\;,\;\; \mathcal{A} \in K^{(m,n)} \;\;,\;\; \vec{b} \in K^m \qquad (*)$$

lösbar, so ist die Lösungsmenge eine lineare Mannigfaltigkeit des K^n der Dimension $n - \mathrm{rg}(\mathcal{A})$. Man erhält alle Lösungen des LGS in der Form $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_h$, wenn $\vec{x}_0$ eine beliebige aber feste (partikuläre oder spezielle) Lösung des LGS ist, und $\vec{x}_h$ sämtliche Lösungen des zugehörigen homogenen LGS

$$\mathcal{A}\vec{x} \;=\; \vec{0} \qquad (**)$$

durchläuft. Die Lösungsmenge von $(*)$ ist ein Vektorraum genau dann, wenn $\vec{b} = \vec{0}$ ist.

Beweis. Es sei $\vec{x}_h$ eine Lösung von $(**)$, dann ist $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_h$ eine Lösung von $(*)$, denn es gilt

$$\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}(\vec{x}_0 + \vec{x}_h) = \mathcal{A}\vec{x}_0 + \mathcal{A}\vec{x}_h = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}\,.$$

Jede Lösung $\vec{x}$ von $(*)$ hat die Form $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_h$, denn aus $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b}$ folgt $\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}$, also ist $\vec{x} - \vec{x}_0 =: \vec{x}_n$ eine Lösung von $(**)$. Die Lösungsmenge von $(*)$ ist eine lineare Mannigfaltigkeit der Dimension $n - \mathrm{rg}(\mathcal{A})$, da nach Satz 6.1.6 die Lösungsmenge von $(**)$ ein Unterraum des K^n mit dieser Dimension ist. Die Lösungsmenge von $(*)$ ist nach Satz 6.1.10 ein Untervektorraum genau dann, wenn $\vec{x} = \vec{0}$ eine Lösung von $(*)$ ist. Dies ist jedoch äquivalent zu $\vec{b} = \mathcal{A}\vec{0} = \vec{0}$. □

Es gilt nun auch die Umkehrung von Satz 6.1.13: Jede lineare Mannigfaltigkeit des K^n lässt sich als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems darstellen. Wir beweisen den etwas allgemeineren

Satz 6.1.14. *Es sei M eine lineare Mannigfaltigkeit des Vektorraums V über K. Es sei $\dim(M) = m$ und $\dim(V) = n$, $0 \leq m \leq n$, und $k = n - m$. Es sei $L(M) \subseteq V^*$ die Menge aller Linearformen, die auf M konstant sind. Dann ist $L(M)$ ein k-dimensionaler Unterraum von V^*. Für jede Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ von $L(M)$ gibt es $c_1, \ldots, c_k \in K$, so dass*

$$\vec{v} \in M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi_1(\vec{v}) & = & c_1 \\ & \vdots & \\ \varphi_k(\vec{v}) & = & c_k \end{cases}\,.$$

M ist ein Untervektorraum von V genau dann, wenn $c_1 = \cdots = c_k = 0$ ist.

Beweis. Sei zunächst U ein m-dimensionaler Untervektorraum von V, und $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von V. Nach Satz 5.5.10 gibt es zu jedem $\varphi \in V^*$ eindeutig bestimmte $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ mit $\varphi(\vec{v}) = \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n$ für $\vec{v} = \lambda_1\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n \in V$. Die Abbildung $\Psi : \varphi \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist nach Satz 5.5.10 ein Isomorphismus von V^* nach K^n. Die Vektoren

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{v}_1 & = & \lambda_{11}\vec{b}_1 & + & \cdots & + & \lambda_{1n}\vec{b}_n \\ \vec{v}_2 & = & \lambda_{21}\vec{b}_1 & + & \cdots & + & \lambda_{2n}\vec{b}_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \vec{v}_m & = & \lambda_{m1}\vec{b}_1 & + & \cdots & + & \lambda_{mn}\vec{b}_n \end{array}$$

mögen eine Basis von U bilden, dann hat die Matrix

$$\mathcal{L} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

den Rang m. Wären nämlich die Zeilen von $\mathcal{L}$ l.a., dann wären auch $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ l.a., was der Basiseigenschaft widerspricht. Es gilt

$$\forall \vec{v} \in U : \varphi(\vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\vec{v}_1) = \cdots = \varphi(\vec{v}_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_{11}\alpha_1 & + & \cdots & + & \lambda_{1n}\alpha_n & = & 0 \\ \lambda_{21}\alpha_1 & + & \cdots & + & \lambda_{2n}\alpha_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1}\alpha_1 & + & \cdots & + & \lambda_{mn}\alpha_n & = & 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Das System $(*)$ fassen wir nun als LGS mit der Koeffizientenmatrix $\mathcal{L}$ und den Unbekannten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ auf. Da $\mathrm{rg}(\mathcal{L}) = m$ ist, bildet nach Satz 6.1.6 die Lösungsmenge $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}$ von $(*)$ einen Unterraum $\tilde{L}$ des K^n der Dimension $k = n - m$. Die Menge $L(U) = \Psi^{-1}(\tilde{L})$ bildet einen k-dimensionalen Unterraum von V^*. Sei nun M eine m-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit, also $M = \{\vec{v}_0 + \vec{u} \ : \ \vec{u} \in U\}$, U ein Unterraum von V mit $\dim(U) = m$, dann gilt

$$\varphi(\vec{v}) \text{ konstant auf } M \quad \Leftrightarrow \quad \forall \vec{u} \in U : \varphi(\vec{v}_0 + \vec{u}) = \varphi(\vec{v}_0) \quad \Leftrightarrow \quad \forall u \in U : \varphi(\vec{u}) = 0 \,.$$

Diese φ bilden nach dem Obigen einen k-dimensionalen Unterraum von V^*. Sei $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ eine Basis von $L(M)$ und

$$\varphi_i(\vec{v}) \ = \ c_i \ , \ \ 1 \le i \le k \ , \ \ \forall \vec{v} \in M \,. \qquad (**)$$

Dazu sei $\Psi(\varphi_i) = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ und

$$\mathcal{A} \ = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} ,$$

dann ist $\mathrm{rg}(\mathcal{A}) = k$. Für $\vec{v} = x_1\vec{b}_1 + \cdots + x_n\vec{b}_n$ ist $(**)$ äquivalent zu

$$\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} . \qquad (***)$$

Nach Satz 6.1.13 ist die Lösungsmenge N von $(***)$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit von V mit $M \subseteq N$. Nach Satz 6.1.11 ist $M = N$. □

6.2 Der Gaußsche Algorithmus

Der Gaußsche Algorithmus ist ein algorithmisches Verfahren zur Berechnung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, das wir in diesem Abschnitt beschreiben: Gegeben sei ein LGS

$$\mathcal{A}\vec{x} \ = \ \vec{b} \ , \ \ \mathcal{A} \in K^{(m,n)} \ \text{ mit } \ (\mathcal{A}|\vec{b}) \ = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array} \right) . \qquad (*)$$

<u>1. Schritt:</u>
Falls in der 1. Spalte mindestens ein Element $\alpha_{k1} \neq 0$ vorkommt, bringe man $(\mathcal{A}|\vec{b})$ durch elementare Zeilenumformungen in die Gestalt

$$(\mathcal{A}^{(1)} \,|\, \vec{b}^{(1)}) \ = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha_{12}^{(1)} & \cdots & \alpha_{1n}^{(1)} & \beta_1^{(1)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(1)} & \cdots & \alpha_{2n}^{(1)} & \beta_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{m2}^{(1)} & \cdots & \alpha_{mn}^{(1)} & \beta_m^{(1)} \end{array} \right) . \qquad (1)$$

Das LGS $\mathcal{A}^{(1)}\vec{x} = \vec{b}^{(1)}$ hat dann dieselbe Lösungsmenge wie $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b}$: Jede elementare Zeilenumformung lässt sich ja durch passende elementare Zeilenumformungen wieder rückgängig machen. Enthält die 1. Spalte von $\mathcal{A}$ nur Nullen, so vertausche man sie zuvor mit einer Spalte von $\mathcal{A}$ (die Spalte $\vec{b}$ kommt nicht in Betracht), welche mindestens ein Element $\neq 0$ enthält. Diese Umformung muss registriert werden: sie bedeutet eine Umnummerierung der Unbekannten. Die so erhaltene Matrix bringe man dann durch elementare Zeilenumformungen auf die Gestalt (1). Ist $\mathcal{A} = 0^{(m,n)}$, so ist man von vorneherein fertig.

2. Schritt:
Falls in der Matrix $\mathcal{A}^{(1)}$ in der 2. Spalte unter den $\alpha_{k2}^{(1)}$ für $k = 2, \dots, m$ mindestens ein Element $\neq 0$ vorkommt, bringe man $(\mathcal{A}^{(1)}|\vec{b}^{(1)})$ durch elementare Zeilenumformungen in die Gestalt

$$(\mathcal{A}^{(2)} \,|\, \vec{b}^{(2)}) \;=\; \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \alpha_{13}^{(2)} & \cdots & \alpha_{1n}^{(2)} & \beta_1^{(2)} \\ 0 & 1 & \alpha_{23}^{(2)} & \cdots & \alpha_{2n}^{(2)} & \beta_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{m3}^{(2)} & \cdots & \alpha_{mn}^{(2)} & \beta_m^{(2)} \end{array}\right) . \tag{2}$$

Sind $\alpha_{22}^{(1)}, \dots, \alpha_{m2}^{(1)} = 0$, dann vertausche man die 2. Spalte von $\mathcal{A}^{(1)}$ mit einer Spalte der Nummer l_0 mit $3 \leq l_0 \leq n$, welche mindestens ein $\alpha_{k_0,l_0}^{(1)} \neq 0$ enthält ($k_0 \geq 2$). Danach bringe man die Matrix durch elementare Zeilenumformungen in die Form (2). Ist jedoch die gesamte Teilmatrix $(\alpha_{kl}^{(1)})$ für $2 \leq k \leq m$ und $2 \leq l \leq n$ Null, so ist man fertig. So fortfahrend, gelangt man zu einer Matrix der Gestalt

$$(\mathcal{A}^{(p)}|\vec{b}^{(p)}) \;=\; \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1,p+1}^{(p)} & \cdots & \alpha_{1,n}^{(p)} & \beta_1^{(p)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2,p+1}^{(p)} & \cdots & \alpha_{2,n}^{(p)} & \beta_2^{(p)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_{3,p+1}^{(p)} & \cdots & \alpha_{3,n}^{(p)} & \beta_3^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{p,p+1}^{(p)} & \cdots & \alpha_{p,n}^{(p)} & \beta_p^{(p)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{p+1}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_m^{(p)} \end{array}\right) . \tag{p}$$

Die Lösungsmenge des LGS $\mathcal{A}^{(p)}\vec{x} = \vec{b}$ stimmt nun (bis auf eventuelle Umnummerierung der Unbekannten) mit der von $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b}$ überein. An den letzten $m - p$ Zeilen kann die Lösbarkeit des Systems abgelesen werden:

Fall 1:
Ist mindestens eines der $\beta_{p+1}^{(p)}, \dots, \beta_m^{(p)}$ nicht Null, so ist das LGS nicht lösbar mit

$$\mathrm{rg}(\mathcal{A}|\vec{b}) \;=\; \mathrm{rg}(\mathcal{A}^{(p)}|\vec{b}^{(p)}) \;=\; p+1 \;=\; \mathrm{rg}(\mathcal{A}^{(p)}) + 1 \;=\; \mathrm{rg}(\mathcal{A}) + 1\,.$$

Fall 2:
Ist dagegen $\beta_{p+1}^{(p)} = \cdots = \beta_m^{(p)} = 0$, so ist das LGS lösbar mit

$$\mathrm{rg}(\mathcal{A}|\vec{b}) \;=\; \mathrm{rg}(\mathcal{A}^{(p)}|\vec{b}^{(p)}) \;=\; p \;=\; \mathrm{rg}(\mathcal{A}^{(p)}) \;=\; \mathrm{rg}(\mathcal{A})\,.$$

Explizite Angabe der Lösungsmenge:
Der Einfachheit halber sei angenommen, dass keine Spaltenvertauschungen stattgefunden haben. Das LGS $\mathcal{A}^{(p)}\vec{x} = \vec{b}^{(p)}$ lautet explizit

$$\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & & & + & \alpha^{(p)}_{1,p+1}x_{p+1} & + & \cdots & + & \alpha^{(p)}_{1,n}x_n & = & \beta^{(p)}_1 \\
& x_2 & & + & \alpha^{(p)}_{2,p+1}x_{p+1} & + & \cdots & + & \alpha^{(p)}_{2,n}x_n & = & \beta^{(p)}_2 \\
& & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
& & x_p & + & \alpha^{(p)}_{p,p+1}x_{p+1} & + & \cdots & + & \alpha^{(p)}_{p,n}x_n & = & \beta^{(p)}_p
\end{array}$$

und kann zu

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & = & \beta^{(p)}_1 & - & \alpha^{(p)}_{1,p+1}x_{p+1} & - & \cdots & - & \alpha^{(p)}_{1,n}x_n \\
x_2 & = & \beta^{(p)}_2 & - & \alpha^{(p)}_{2,p+1}x_{p+1} & - & \cdots & - & \alpha^{(p)}_{2,n}x_n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_p & = & \beta^{(p)}_p & - & \alpha^{(p)}_{p,p+1}x_{p+1} & - & \cdots & - & \alpha^{(p)}_{p,n}x_n
\end{array}$$

umgeschrieben werden. Dabei sind die $x_{p+1}, \ldots, x_n$ frei wählbare Parameter. Der allgemeine Lösungsvektor $\vec{x}$ hat also die Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{(p)}_1 - \alpha^{(p)}_{1,p+1}x_{p+1} - \cdots - \alpha^{(p)}_{1,n}x_n \\ \beta^{(p)}_2 - \alpha^{(p)}_{2,p+1}x_{p+1} - \cdots - \alpha^{(p)}_{2,n}x_n \\ \vdots \\ \beta^{(p)}_p - \alpha^{(p)}_{p,p+1}x_{p+1} - \cdots - \alpha^{(p)}_{p,n}x_n \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \beta^{(p)}_1 \\ \vdots \\ \beta^{(p)}_p \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Partikuläre Lösung von } \mathcal{A}\vec{x}=\vec{b}} \underbrace{+ x_{p+1} \begin{pmatrix} -\alpha^{(p)}_{1,p+1} \\ \vdots \\ -\alpha^{(p)}_{p,p+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{p+2} \begin{pmatrix} -\alpha^{(p)}_{1,p+2} \\ \vdots \\ -\alpha^{(p)}_{p,p+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} -\alpha^{(p)}_{1,n} \\ \vdots \\ -\alpha^{(p)}_{p,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Basis des Lösungsraums von } \mathcal{A}\vec{x}=\vec{0}} .$$

Bemerkung 6.2.1. Betrachte ein LGS $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b}$ simultan für mehrere rechte Seiten:

$$\mathcal{A}\vec{x}_1 = \vec{b}_1\ ,\ \mathcal{A}\vec{x}_2 = \vec{b}_2\ ,\ \ldots\ ,\ \mathcal{A}\vec{x}_q = \vec{b}_q$$

oder äquivalent dazu die Matrixgleichung $\mathcal{AX} = \mathcal{B}$ mit $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_q)$ und $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q)$. Diesen Fall behandelt man analog durch Umformung der Matrix $(\mathcal{A}|\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q) = (\mathcal{A}|\mathcal{B})$. Ein Spezialfall dieses Problems ist uns schon in Satz 4.3.5 bei der Bestimmung der inversen Matrix $\mathcal{A}^{-1}$ begegnet, was ja auf die Lösung der Gleichung $\mathcal{AX} = \mathcal{E}_n$ hinausläuft.

Bemerkung 6.2.2. Es genügt auch, $(\mathcal{A}|\vec{b})$ durch Zeilenumformungen in die folgende allgemeinere Form zu bringen:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} \alpha'_{11} & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & \beta'_1 \\ 0 & \alpha'_{22} & * & \cdots & * & * & \cdots & * & \beta'_2 \\ 0 & 0 & \alpha'_{33} & \cdots & * & * & \cdots & * & \beta'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha'_{pp} & * & \cdots & * & \beta'_p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta'_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta'_m \end{array}\right) \quad , \quad * = \text{beliebige Einträge aus } K \quad , \quad \alpha'_{jj} \neq 0\,.$$

Im Falle der Lösbarkeit $(\beta'_{p+1} = \cdots = \beta'_m = 0)$ erhält man die Lösungen durch sukzessives Auflösen der Gleichungen von unten nach oben.

Beispiel 6.2.3. Wir lösen das System

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & + & 4w & = & 7 \\ 2x & + & 4y & - & 6z & + & 10w & = & 20 \\ -x & - & 2y & + & 9z & - & 9w & = & -10 \end{array}\right. .$$

$$(\mathcal{A}|\vec{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & -6 & 10 & 20 \\ -1 & -2 & 9 & -9 & -10 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Spaltentausch}} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x & w & z & y \end{array} \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lclcl} x & = & 1 & - & 2y \\ w & = & 3 & & \\ z & = & 2 & & \end{array}\right. \quad , \ y \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\,.$$

Damit ergeben sich sämtliche Lösungsvektoren in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 6.2.4. Man bestimme eine Gleichung der Ebene E des $\mathbb{R}^3$, die durch die Punkte $P = (1,-1,2)$, $Q = (2,4,-5)$ und $R = (3,1,0)$ verläuft. Lösung: Da die Ebene E eine 2-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit des 3-dimensionalen $\mathbb{R}^3$ ist, gibt es nach Satz 6.1.14 eine Linearform $\varphi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und ein $d \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{v} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\vec{v}) = d\,.$$

Diese hat die Form $\varphi(x,y,z) = ax + by + cz$. Die Bestimmung von φ geschieht nach der im Beweis von Satz 6.1.14 beschriebenen Methode. Die Richtungsvektoren von E sind $\overrightarrow{PQ} = (1,5,-7)$ und $\overrightarrow{PR} = (2,2,-2)$, also ist

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \ : \ t, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Koeffizienten (a, b, c) von φ bestimmen sich als Lösungen des LGS

$$\begin{cases} a + 5b - 7c = 0 \\ 2a + 2b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 5b - 7c = 0 \\ \quad - 8b + 12c = 0 \end{cases}$$

Wir wählen $c = 2$, dann ist $b = 3$ und $a = -1$, sowie $\varphi(x, y, z) = -x + 3y + 2z$ (die Menge der Möglichen φ bildet nach Satz 6.1.14 einen 1-dimensionalen Vektorraum, also ist φ nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt). Den verbleibenden Koeffizienten d in der Gleichung von E erhält man, indem man einen beliebigen Punkt von E in φ einsetzt: beispielsweise ist $\varphi(1, -1, 2) = 0$, also $d = 0$, und die Gleichung von E ist

$$-x + 3y + 2z = 0 .$$

Wegen $d = 0$ geht E durch den Nullpunkt, und ist sogar ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 6.2.5. Man finde ein Gleichungssystem für die 3-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^5$, die durch die Punkte

$$P_1 = (2, -1, 0, 3, 4) \ , \ P_2 = (1, 2, 1, 3, 5) \ , \ P_3 = (3, 1, 1, 4, 5) \ , \ P_4 = (2, 0, 1, 5, 0)$$

verläuft. Lösung: Wir schreiben M zunächst wieder als

$$M = \{\vec{v}_0 + \vec{u} \ : \ \vec{u} \in U\} \ , \ U \subseteq \mathbb{R}^5 \text{ Unterraum} .$$

U hat die Basis

$$B = \left\{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right\} .$$

Nach Satz 6.1.14 gibt es 2 Linearformen $\varphi_1, \varphi_2 \in L(M)$ und $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \in M \ \Leftrightarrow \ \varphi_1(\vec{x}) = d_1 \text{ und } \varphi_2(\vec{x}) = d_2 .$$

Die Linearformen φ_1, φ_2 können als irgendeine Basis des 2-dimensionalen Unterraums $L(M)$ von $L(\mathbb{R}^5, \mathbb{R})$ bestimmt werden. Die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ der $\varphi \in L(M)$ bestimmen sich als Lösungen des LGS

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 - 4\alpha_5 = 0 \end{cases} .$$

Diese Koeffizienten sind die Komponenten der Vektoren der Basis B. Der Gaußsche Algorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 22 \end{pmatrix} .$$

Die Wahlen $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = -3$ bzw. $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 0$ liefern zwei l.u. Linearformen φ_1, φ_2:

$$\begin{array}{l} \alpha_4 = 0, \alpha_5 = -3 \ \Rightarrow \ \alpha_3 = -22, \alpha_2 = 10, \alpha_1 = 5 \\ \alpha_4 = 1, \alpha_5 = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_3 = -3, \alpha_2 = 1, \alpha_1 = 0 \end{array} .$$

Also ist $\varphi_1(x_1, \ldots, x_5) = 5x_1 + 10x_2 - 22x_3 - 3x_5$ und $\varphi_2(x_1, \ldots, x_5) = x_2 - 3x_3 + x_4$. Die Zahlen $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ ergeben sich wiederum durch Einsetzen eines beliebigen Punktes von M in φ_1 und φ_2: beispielsweise ist

$$\varphi_1(2, -1, 0, 3, 4) = -12 \ , \ \varphi_2(2, -1, 0, 3, 4) = 2 .$$

M ist also bestimmt durch das LGS

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 - 22x_3 - 3x_5 = -12 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases} .$$

Wegen $d_1, d_2 \neq 0$ ist M kein Untervektorraum.