Prof. Dr. H. Maier
Dipl.-Math. D. Haase
daniel.haase@uni-ulm.de

15.11.2007
WS 2007/2008

Lineare Algebra für Informatiker - Übungsblatt 5

Abgabe bis spätestens 22.11.2007 16:15 Uhr im Abgabekasten vor dem H3

Aufgabe 23 (Die Unterräume des $\mathbb{R}^3$) 3 Punkte

Bestimmen Sie sämtliche Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ (mit Beweis, dass es tatsächlich alle möglichen Unterräume sind). Lösen Sie die Aufgabe ohne die Verwendung von Satz 3.3.20.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ ist (vgl. Beispiel 3.3.17).

Aufgabe 24 (Ein Test für lineare Abhängigkeit) 3 Punkte

Es seien zwei Vektoren des Standardraums $(K^2, K, \cdot)$ mit Komponenten $a, b, c, d \in K$ gegeben. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$ad - bc \text{ ist nicht die Null aus } K \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ sind } K\text{-linear unabhängig.}$$

Aufgabe 25 (Lineare Abhängigkeit) 3 Punkte

Entscheiden Sie (mit Beweis oder Gegenbeispiel), ob die folgenden Mengen linear abhängig über dem Körper K sind:

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, (b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}^2$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$,

(c) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, (d) $K = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{Z}_3^3$, $M = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}$.

Aufgabe 26 (Lineare Codes) 3 Punkte

Eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ nennt man einen *Linearen Code*, falls C ein Unterraum des Standardraums $\mathbb{Z}_2^n$ über dem endlichen Körper $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{B}$ ist. Entscheiden Sie (Beweis oder Gegenbeispiel) für die folgenden Codes aus dem $\mathbb{Z}_2^4$ jeweils, ob es sich um lineare Codes handelt. Falls ja, bestimmen Sie eine Basis (ohne Beweis) und die Dimension:

$$R = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})\} \ , \ C = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1},\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})\} \ ,$$
$$P = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1},\bar{0},\bar{1}), (\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1},\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})\} \ .$$

Aufgabe 27 (Der Abbildungsraum) 2 Punkte

Es sei M eine nichtleere Menge. Beweisen Sie, dass der K-Vektorraum $\mathrm{Abb}(M, K)$ die Dimension $|M|$ besitzt.

Hinweis: Versuchen Sie das Konzept der Standardbasis des K^n auf den Raum $\mathrm{Abb}(M, K) = K^M$ zu übertragen.

Aufgabe 28 (Wahr oder Falsch) 2 Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (kurze Begründung oder Gegenbeispiel):

(a) Ist V ein K-Vektorraum, so auch $\mathrm{Abb}(M, V)$ für jedes $M \neq \emptyset$ mit werteweisen Operationen.
(b) Ist U ein Unterraum von W, und W ein Unterraum von V, so ist U ein Unterraum von V.
(c) Es seien $\vec{u}, \vec{v} \in V$, für die Summe von $U = \langle\, \vec{u}\, \rangle$ und $W = \langle\, \vec{w}\, \rangle$ ist dann $U + W = \langle\langle\, \vec{u}, \vec{w}\, \rangle\rangle$.
(d) Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ linear abhängig, so auch jede Obermenge von $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$.