Prof. Dr. H. Maier
Dipl.-Math. D. Haase
daniel.haase@uni-ulm.de

22.11.2007
WS 2007/2008

Lineare Algebra für Informatiker - Übungsblatt 6

Abgabe bis spätestens 29.11.2007 16:15 Uhr im Abgabekasten vor dem H3

Aufgabe 29 (Codewörter) **1 Punkt**

Es sei $C \subseteq \mathbb{Z}_p^n$ ein linearer Code über dem Körper $\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ der Dimension n. Bestimmen Sie $|C|$.

Aufgabe 30 (Basiserweiterung) **3 Punkte**

Die folgenden Vektormengen sind linear unabhängig, erweitern Sie sie jeweils zu einer Basis des Vektorraums V. Zeigen Sie jeweils kurz, dass Ihre Vektoren tatsächlich eine Basis bilden:

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}^2$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} \right\}$, (b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$,

(c) $K = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{Z}_3^3$, $C = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}$, (d) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[x]$, $R = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$.

Aufgabe 31 (Koordinaten ausrechnen) **3 Punkte**

Gegeben sind im Folgenden eine Basis und ein Vektor, bestimmen Sie jeweils den Koordinatenvektor des Vektors bzgl der Basis (d. h. berechnen Sie das Urbild unter der bijektiven Abbildung $K^n \to V$ aus Satz 3.3.21):

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \langle\langle 1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3 \rangle\rangle \subset \mathbb{R}[x]$, $p(x) = x^3 - x^2 + 1$.

(b) $K = \mathbb{C}$, $V = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ mit $w, z \in \mathbb{C}$ beliebig.

(c) $K = \mathbb{Z}_5$, $V = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle = \mathbb{Z}_5^2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$ mit $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ beliebig.

Aufgabe 32 (Der Dimensionssatz für Summenräume) **3 Punkte**

Berechnen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes die Dimension des Summenraums $U + W$, wobei

$$U = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \ , \ W = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$$

jeweils Teilräume des $\mathbb{R}^4$ sind. Anleitung: Bestimmen Sie zuerst die Dimension des Schnitts $U \cap W$.

Aufgabe 33 (Matrizen jonglieren) **4 Punkte**

Prüfen Sie, für welche Paare aus den folgenden vier reellen Matrizen das Matrixprodukt existiert. Berechnen Sie für diese Möglichkeiten das Produkt (es gibt 16 mögliche Wahlen, von denen aber nur 8 ein Produkt liefern).

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \ , \ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \mathcal{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 34 (Matrixpotenzen) **2 Punkte**

Berechnen Sie per Induktion für $k \in \mathbb{N}$ die Potenzen $\mathcal{A}^k$ der Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.