Prof. Dr. H. Maier
Dipl.-Math. D. Haase
daniel.haase@uni-ulm.de

29.11.2007
WS 2007/2008

Lineare Algebra für Informatiker - Übungsblatt 7

Abgabe bis spätestens 06.12.2007 16:15 Uhr im Abgabekasten vor dem H3

Aufgabe 35 (Matrix-Vektor-Multiplikation) **2 Punkte**

Es sei $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$ eine quadratische Matrix und $\vec{v} \in K^n$ ein Spaltenvektor, dann ist $\mathcal{A} \cdot \vec{v}$ wieder ein Spaltenvektor aus dem K^n. Also ist

$$\Phi : \begin{cases} K^n & \to & K^n \\ \vec{v} & \mapsto & \mathcal{A} \cdot \vec{v} \end{cases}$$

ein Element von $\mathrm{Abb}(K^n, K^n)$. Zeigen Sie durch direkte Rechnung (d. h. ohne Benutzung irgendwelcher Vorlesungssätze), dass Φ nicht injektiv ist, falls $\mathcal{A}$ nicht vollen Rang hat.

Aufgabe 36 (Rangbestimmung) **3 Punkte**

Bestimmen Sie jeweils den Rang der folgenden Matrizen mit Hilfe der Technik aus dem Beweis von Satz 4.2.6:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,2)} \;,\; \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{(4,4)} \;,\; \mathcal{C} = \begin{pmatrix} c & 1 & 1 \\ c & c & 1 \\ c & c & c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C} \;,\; \mathcal{X} = \begin{pmatrix} x & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & x & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{Z}_3 \,.$$

Aufgabe 37 (Blockmatrizen) **4 Punkte**

Es sei K ein Körper, und $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{X} \in K^{(n,n)}$, sowie

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{X} \\ & \mathcal{B} \end{pmatrix} \in K^{(2n,2n)}$$

die aus $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{X}$ aufgebaute Blockmatrix. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ genau dann vollen Rang besitzt, wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ jeweils vollen Rang besitzen. Zeigen Sie dazu, dass es Umformungen für $\mathcal{C}$ gibt, welche die Blöcke $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ in Matrizen der Form $D_a^{(n,n)}$ bzw. $D_b^{(n,n)}$ innerhalb $\mathcal{C}$ überführen.

Aufgabe 38 (Obere Dreiecksmatrizen) **4 Punkte**

Es sei K irgend ein Körper. Eine quadratische Matrix $D = (d_{ij}) \in K^{(n,n)}$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls $d_{ij} = 0$ ist für $i > j$. Zeigen Sie:

(a) Die oberen Dreiecksmatrizen bilden einen Teilring von $K^{(n,n)}$.

(b) Eine obere Dreiecksmatrix besitzt genau dann den vollen Rang n, wenn auf der Diagonale keine Null steht.

Es gibt zwei Lösungsmöglichkeiten für (b): Entweder Sie bauen den Beweis von Satz 4.2.6 nach (mühsam aber einfach), oder Sie setzen die vorherige Übungsaufgabe ein (geht schneller, erfordert aber eine clevere Induktion).

Aufgabe 39 (Nilpotente Matrizen) **3 Punkte**

Eine Matrix $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$ heißt *nilpotent*, falls es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mathcal{A}^m = 0^{(n,n)}$. Zeigen Sie per Induktion, dass jede obere Dreiecksmatrix, die nur Nullen auf der Diagonalen hat, nilpotent ist.

Tipp: Rechnen Sie die Potenzen $\mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3, \ldots$ für einfache Matrizen der obigen Form aus, und überlegen Sie dann genau, wie Sie die Induktion ansetzen, und über *was* die Induktion zu führen ist.