Prof. Dr. H. Maier
Dipl.-Math. D. Haase
daniel.haase@uni-ulm.de

22.11.2007
WS 2007/2008

Lineare Algebra für Informatiker - Lösungsblatt 5

Zur Übungsstunde vom 22.11.2007

Aufgabe 23 (Die Unterräume des $\mathbb{R}^3$) **3 Punkte**

Bestimmen Sie sämtliche Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ (mit Beweis, dass es tatsächlich alle möglichen Unterräume sind). Lösen Sie die Aufgabe ohne die Verwendung von Satz 3.3.20.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ ist (vgl. Beispiel 3.3.17).

Lösung

Die Liste aller Unterräume gliedert sich nach ihrer Dimension:

Dimension 0: Der einzige Unterraum der Dimension Null ist $\{\vec{0}\}$.
Das sind sämtliche Punkte im $\mathbb{R}^3$, die durch den Nullpunkt gehen.

Dimension 1: Ein eindimensionaler Unterraum ist stets von der Form $U = \mathbb{R} \cdot \vec{v} = \langle \vec{v} \rangle$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$.
Das sind sämtliche Geraden im $\mathbb{R}^3$, die durch den Nullpunkt gehen.

Dimension 2: Zweidimensionale Unterräume sind die $U = \mathbb{R}\vec{v}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_2 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$, wobei $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ l.u. sind.
Das sind sämtliche Ebenen im $\mathbb{R}^3$, die durch den Nullpunkt gehen.

Dimension 3: Der einzige dreidimensionale Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist der $\mathbb{R}^3$ selbst.
Das sind sämtliche Räume im $\mathbb{R}^3$, die durch den Nullpunkt gehen.

Wir müssen jetzt zeigen, dass jeder mögliche Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ in der Liste vertreten ist. Es sei also $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ein ganz beliebiger Unterraum. Ist $U = \{\vec{0}\}$, so ist U in der Liste. Andernfalls gibt es ein $\vec{v}_1 \in U$ mit $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, wegen der linearen Abgeschlossenheit eines Unterraums liegt $\langle \vec{v}_1 \rangle = K\vec{v}_1$ komplett in U. Ist $U = \langle \vec{v}_1 \rangle$, so ist U in der Liste, andernfalls gibt es ein $\vec{v}_2 \in U - \langle \vec{v}_1 \rangle$. Dann liegt wiederrum der Raum $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ komplett in U. Stimmt er mit U überein, so steht U in der Liste, andernfalls gibt es $\vec{v}_3 \in U - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$, und der Raum $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ liegt komplett in U. Es gibt jetzt nur noch einen verbleibenden Raum in der Liste, den $\mathbb{R}^3$ selbst, d. h. wir müssen an dieser Stelle zeigen, dass $U = \mathbb{R}^3$ ist. Wäre das falsch, so gäbe es $\vec{v}_4 \in \mathbb{R}^3 - U$, insbesondere wären dann $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ l.u., also $\dim(\mathbb{R}^3) \geq 4$ nach Definition der Dimension, im Widerspruch zu $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Aufgabe 24 (Ein Test für lineare Abhängigkeit) **3 Punkte**

Es seien zwei Vektoren des Standardraums $(K^2, K, \cdot)$ mit Komponenten $a, b, c, d \in K$ gegeben. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$ad - bc \text{ ist nicht die Null aus } K \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ sind } K\text{-linear unabhängig.}$$

Lösung

Richtung $\Rightarrow$:
Wir müssen zeigen, dass aus einer Darstellung der Form

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

stets folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ist. Dazu formen wir das zugehörige Gleichungssystem um. Aus der Voraussetzung $ad-bc \neq 0$ folgt, dass a und c nicht beide Null sein können. Ohne Einschränkung sei $a \neq 0$, dann folgt durch Subtraktion des $\frac{c}{a}$-fachen der ersten Zeile von der zweiten Zeile

$$\begin{cases} \lambda_1 a & + & \lambda_2 b & = & 0 \\ \lambda_1 c & + & \lambda_2 d & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 a & + & \lambda_2 b & = & 0 \\ 0 & + & \lambda_2 (d - \frac{bc}{a}) & = & 0 \end{cases}$$

Die untere Gleichung ist nach Erweitern $\lambda_2(\frac{ad}{a} - \frac{bc}{a}) = 0$. Wir können sie erst mit a und dann mit $(ad - bc)^{-1}$ durchmultiplizieren, weil weder a noch $ad - bc$ Null sind, und erhalten $\lambda_2 = 0$. Die erste Gleichung gibt dann auch $\lambda_1 = 0$. Also lässt sich der Nullvektor mit den gegebenen Vektoren nur trivial kombinieren, d. h. die beiden Vektoren sind linear unabhängig nach Definition 3.3.1.

Richtung $\Leftarrow$:
Wir zeigen $B \Leftarrow A$ durch Widerspruch: Angenommen B wäre falsch, dann haben wir zu zeigen, dass auch A falsch ist. „B falsch“ heißt hier, dass $ad - bc = 0$ ist. Wir müssen zeigen, dass A falsch ist, d. h. dass die Vektoren linear abhängig sind. Dazu müssen wir $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ so finden, dass der Nullvektor entsteht, aber mindestens einer der beiden Koeffizienten nicht Null ist. Wir unterscheiden drei Fälle: Sind mindestens drei der vier Parameter $a, b, c, d \in K$ Null, so ist einer der beteiligten Vektoren der Nullvektor, und die beiden Vektoren sind linear abhängig, weil $\lambda\vec{0} + 0\vec{v} = \vec{0}$ für alle $\lambda \neq 0$ eine nichttriviale Nullkombination ist. Ist $c = d = 0$, so ist

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $\lambda_1 = -b$ und $\lambda_2 = a$ eine nichttriviale Kombination des Nullvektors. Ist nur $a \neq 0$ oder $c \neq 0$, so ist mit der Wahl $\lambda_1 = d$ und $\lambda_2 = -c$

$$d \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Nullkombination. Damit sind die Vektoren stets linear abhängig wenn $ad - bc = 0$ ist.

Aufgabe 25 (Lineare Abhängigkeit) — 3 Punkte

Entscheiden Sie (mit Beweis oder Gegenbeispiel), ob die folgenden Mengen linear abhängig über dem Körper K sind:

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, (b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}^2$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$,

(c) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, (d) $K = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{Z}_3^3$, $M = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}$.

Lösung

Zu (a): Wir verwenden Aufgabe 24: es ist $ad - bc = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 = 4$. Im Körper $K = \mathbb{R}$ ist $4 \neq 0$, also sind die Vektoren linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

Zu (b): Wir dürfen Aufgabe 24 hier nicht benutzen, denn sie gilt nur, wenn der K^n als Vektorraum über K genommen wird, und hier wird $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über dem von $\mathbb{C}$ verschiedenen Körper $\mathbb{R}$ betrachtet. Tatsächlich ist zwar $ad - bc = i(-i) - 1 = 0$, aber die Vektoren sind über $\mathbb{R}$ linear unabhängig, denn es gilt

$$\begin{cases} \lambda_1 i & + & \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 i & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0\,,$$

da schon die erste Zeile des Systems impliziert, dass λ_1 der Imaginärteil der Null, und λ_2 der Realteil der Null ist. Über $\mathbb{C}$ wären die Vektoren linear abhängig, dann könnte man beispielsweise die Null nichttrivial mit $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = 1$ kombinieren.

Zu (c): Diese drei Vektoren sind linear unabhängig: Angenommen man hat eine Nullkombination

$$\begin{cases} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & 0 \end{cases}$$

vorgelegt, so folgt aus der dritten Zeile $\lambda_1 = -2\lambda_2$. Eingesetzt in die zweite Zeile ergibt das $-4\lambda_2 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, also $\lambda_3 = 3\lambda_2$. Eingesetzt in die erste Zeile ergibt dies $-2\lambda_2 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, also $\lambda_3 = 0$, und damit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, also war die Nullkombination trivial und die drei Vektoren sind linear unabhängig (über $\mathbb{R}$).

Über dem Körper $\mathbb{Z}_3$ sind die Vektoren dagegen linear abhängig. Wir wählen beispielsweise $\lambda_1 = \bar{1}$, $\lambda_2 = \bar{1}$ und $\lambda_3 = \bar{0}$, dann ist

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{0} \cdot \bar{1} \\ \bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{0} \cdot \bar{1} \\ \bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{0} \cdot \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1} \\ \overline{1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1} \\ \overline{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{3} \\ \bar{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Nullkombination, weil λ_1, λ_2 nicht die Null aus $\mathbb{Z}_3$ sind.

Aufgabe 26 (Lineare Codes) 3 Punkte

Eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ nennt man einen *Linearen Code*, falls C ein Unterraum des Standardraums $\mathbb{Z}_2^n$ über dem endlichen Körper $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{B}$ ist. Entscheiden Sie (Beweis oder Gegenbeispiel) für die folgenden Codes aus dem $\mathbb{Z}_2^4$ jeweils, ob es sich um lineare Codes handelt. Falls ja, bestimmen Sie eine Basis (ohne Beweis) und die Dimension:

$$R = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})\} \ , \quad C = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1},\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})\} \ ,$$

$$P = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1},\bar{0},\bar{1}), (\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1},\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})\} \, .$$

Lösung

Die Menge R ist ein linearer Code, denn mit $\vec{u}, \vec{v} \in R$ ist auch jede Linearkombination $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v}$ ein Element von R. Dazu überlegt man zuerst, dass für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_2$ ja nur die beiden Möglichkeiten $\bar{0}$ (löscht den Vektor) und $\bar{1}$ (lässt den Vektor unverändert) möglich sind, also reicht es, $\vec{u} + \vec{v} \in R$ zu zeigen. Es gibt aber für $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nur die Möglichkeiten

$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{u} + \vec{v}$
$(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}) \in R$
$(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1}) \in R$
$(\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1}) \in R$
$(\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}) \in R$

also ist R ein Unterraum des $\mathbb{Z}_2^4$ und damit ein linearer Code (solche Codes nennt man Repetition-Codes, weil das erste Bit einfach wiederholt wird). Der Code hat offensichtlich die Basis $\{(\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})\}$, und hat daher die Dimension Eins.

Der Code C ist kein linearer Code: die Summe des zweiten und dritten Codeworts

$$(\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{0}) \ + \ (\bar{1},\bar{1},\bar{0},\bar{0}) \ = \ (\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{0})$$

liegt nicht in C, also ist das Unterraumkriterium verletzt und C ist nicht linear. Da C kein Vektorraum ist, kann man auch nicht von Basis oder Dimension sprechen.

Der Code P besteht aus allen Vektoren des $\mathbb{Z}_2^4$, die eine gerade Anzahl Einsen enthalten. Laut Beispiel 3.2.9 der Vorlesung (mit $K = \mathbb{Z}_2$ und $n = 4$) ist P ein Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$ und damit linear. Eine mögliche Basis des Codes P ist $\{(\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{1},\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{0})\}$, also ist seine Dimension 3.

Aufgabe 27 (Der Abbildungsraum) 2 Punkte

Es sei M eine nichtleere Menge. Beweisen Sie, dass der K-Vektorraum $\mathrm{Abb}(M,K)$ die Dimension $|M|$ besitzt.

Hinweis: Versuchen Sie das Konzept der Standardbasis des K^n auf den Raum $\mathrm{Abb}(M,K) = K^M$ zu übertragen.

Lösung

Wir betrachten zuerst den Fall, dass M endlich ist, also $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$. Dazu sei $f_k : M \to K$ die Funktion

$$f_k(m_j) \ = \ \delta_{jk} \ = \ \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad j = k \\ 0 & \text{falls} \quad j \neq k \end{cases} .$$

Die Menge $B = \{f_1, \ldots, f_n\}$ hat genau $|M|$ verschiedene Elemente. Wir müssen zeigen, dass B eine Basis von $\mathrm{Abb}(M,K)$ bildet, d. h. dass jede beliebige Funktion $f : M \to K$ in der Form

$$f \ = \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$$

dargestellt werden kann (d. h. B ist ein Erzeugendensystem), und dass die f_k linear unabhängig sind (d. h. B ist eine Basis). Ein beliebiges f kann dargestellt werden durch die Koeffizienten $\lambda_k = f(m_k)$, denn dann gilt für jedes $m_j \in M$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(m_k) f_k\right)(m_j) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f(m_k) f_k(m_j) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f(m_k)\delta_{jk} \;=\; f(m_j)\,.$$

Nun zur linearen Unabhängigkeit: ist

$$0 \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$$

eine Kombination der Nullabildung, so ergibt die Eingabe m_j

$$0(m_j) \;=\; 0 \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(m_j) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{jk} \;=\; \lambda_j\;,$$

also $\lambda_j = 0$, aber da j hier beliebig ist folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, d. h. die Nullkombination war trivial. Damit ist B ein Erzeugendensystem und linear unabhängig, also $\mathrm{Abb}(M, K) = \langle\langle\, B \,\rangle\rangle$.

Ist $|M|$ eine unendliche Menge, dann gibt es unendlich viele $m_1, m_2, \ldots \in M$, mit zugehörigen $f_1, f_2, \ldots$ die jeweils wieder durch $f_k(m_j) = \delta_{kl}$ definiert seien. Dann sind diese Funktionen alle linear unabhängig, denn jede endliche Auswahl $f_1, \ldots, f_n$ ist nach der obigen Rechnung linear unabhängig. Daraus folgt $\dim(K^M) = \infty$ falls $|M| = \infty$ ist.

Aufgabe 28 (Wahr oder Falsch) — 2 Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (kurze Begründung oder Gegenbeispiel):

(a) Ist V ein K-Vektorraum, so auch $\mathrm{Abb}(M, V)$ für jedes $M \neq \emptyset$ mit werteweisen Operationen.
(b) Ist U ein Unterraum von W, und W ein Unterraum von V, so ist U ein Unterraum von V.
(c) Es seien $\vec{u}, \vec{w} \in V$, für die Summe von $U = \langle\, \vec{u} \,\rangle$ und $W = \langle\, \vec{w} \,\rangle$ ist dann $U + W = \langle\langle\, \vec{u}, \vec{w} \,\rangle\rangle$.
(d) Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ linear abhängig, so auch jede Obermenge von $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$.

Lösung

Ist V ein K-Vektorraum, so auch $\mathrm{Abb}(M, V)$ *für jedes $M \neq \emptyset$ mit werteweisen Operationen*:
Die Aussage ist wahr, denn sind $f : M \to V$ und $g : M \to V$ Abbildungen und $\lambda, \mu \in K$, so ist auch

$$(\lambda f + \mu g) :\ m \mapsto \lambda f(m) + \mu g(m)$$

eine Abbildung von M nach V, also ist $\mathrm{Abb}(M, V)$ linear abgeschlossen.

Ist U ein Unterraum von W, und W ein Unterraum von V, so ist U ein Unterraum von V:
Es gilt nach Definition 3.2.1, dass U eine Teilmenge von W ist, die alle Vektorraumaxiome erfüllt, wegen $W \subseteq V$ ist U aber erst recht eine Teilmenge von V, die (immer noch) alle Vektorraumaxiome erfüllt, also ist U ein Unterraum von V.

Es seien $\vec{u}, \vec{w} \in V$, für die Summe von $U = \langle\, \vec{u} \,\rangle$ und $W = \langle\, \vec{w} \,\rangle$ ist dann $U + W = \langle\langle\, \vec{u}, \vec{w} \,\rangle\rangle$:
Die Aussage ist falsch: beispielsweise ist für $\vec{u} = 1$ und $\vec{w} = 1$ im $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ nicht $\langle\, 1 \,\rangle + \langle\, 1 \,\rangle = \mathbb{R} = \langle\langle\, 1, 1 \,\rangle\rangle$, da die Vektoren $1, 1$ nicht linear unabhängig sind (ohne die Doppelklammer wäre die Aussage richtig).

Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ linear abhängig, so auch jede Obermenge von $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$:
Das ist falsch, beispielsweise sind die Vektoren $1, 1$ des $\mathbb{R}^1$ linear abhängig, nicht aber die Obermenge $\{1, 1\}$ (weil die Mengenklammer das doppelte Auftreten der Eins schluckt).