Prof. Dr. H. Maier
Dipl.-Math. D. Haase
daniel.haase@uni-ulm.de

29.11.2007
WS 2007/2008

Lineare Algebra für Informatiker - Lösungsblatt 6

Zur Übungsstunde vom 29.11.2007

Aufgabe 29 (Codewörter) **1 Punkt**

Es sei $C \subseteq \mathbb{Z}_p^n$ ein linearer Code über dem Körper $\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ der Dimension n. Bestimmen Sie $|C|$.

Lösung

Nach Definition der Dimension gibt es eine Basis $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ von C. Nach Satz 3.3.21 wird jeder Vektor $\vec{v} \in C$ eindeutig in der Form

$$\vec{v} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{v}_k$$

dargestellt, die Anzahl der $\vec{v} \in C$ ist also die Anzahl der möglichen Linearkombinationen über $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, also die Anzahl der Möglichkeiten die Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z}_p$ zu wählen. Da die n Koeffizienten voneinander unabhängig sind, und es für jeden Koeffizienten $|\mathbb{Z}_p| = p$ Wahlmöglichkeiten gibt, hat man p^n mögliche Wahlen, also $|C| = p^n$. Für jeden Vektorraum V über einem endlichen Körper mit q Elementen gilt stets

$$|V| \;=\; q^{\dim(V)} \;.$$

Aufgabe 30 (Basiserweiterung) **3 Punkte**

Die folgenden Vektormengen sind linear unabhängig, erweitern Sie sie jeweils zu einer Basis des Vektorraums V. Zeigen Sie jeweils kurz, dass Ihre Vektoren tatsächlich eine Basis bilden:

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}^2$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} \right\}$, (b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$,

(c) $K = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{Z}_3^3$, $C = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}$, (d) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[x]$, $R = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$.

Lösung

Zu a): Da der $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ die Dimension 4 besitzt, müssen wir zu den drei gegebenen Vektoren einen vierten Vektor anfügen, so dass die Vektoren linear unabhängig sind. Man kann beispielsweise $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nehmen, denn für jede Linearkombination der Null

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

folgt aus der zweiten Zeile $\lambda_1 + i\lambda_3 + \lambda_4 = 0$. Damit ist sowohl der Realteil $\lambda_1 + \lambda_4$ wie auch der Imaginärteil λ_3 Null, also $\lambda_3 = 0$ und $\lambda_1 = -\lambda_4$. Einsetzen in die erste Zeile ergibt

$$0 \;\stackrel{!}{=}\; \lambda_1 + i\lambda_2 + 3\lambda_3 \;=\; -\lambda_4 + i\lambda_2 \;.$$

Da auch hier Real- und Imaginärteil gleichzeitig Null sein müssen bleibt nur $\lambda_4 = \lambda_2 = 0$, damit war die obige Linearkombination trivial, d.h. die Vektoren sind tatsächlich linear unabhängig, und bilden eine $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{C}^2$.

Zu b): Auch hier ist beispielsweise $(0, 0, 1)$ eine einfache Wahl, um die Menge zu einer Basis zu erweitern. Ist

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

eine Nullkombination, so wäre wegen der ersten Zeilen $\lambda_2 = 0$, dann wegen der zweiten Zeile $\lambda_1 = 0$ und schließlich in der dritten Zeile $\lambda_3 = 0$.

Auch hier kann man mit Standardvektoren auffüllen, beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$$

linear unabhängig und damit eine Basis des $\mathbb{Z}_3^3$. Das Argument ist das Gleiche wie in (b), es hängt garnicht vom Körper ab. Tatsächlich sagt der Satz von Steinitz, dass man *immer* mit Standardvektoren füllen kann, da diese immer eine linear unabhängige Menge bilden (fraglich ist halt nur, mit welchen man auffüllen kann).

Das Steinitz-Argument versagt zwar für (d), da dieser Vektorraum unendlichdimensional ist, aber wir können auch ohne die Aussage des Satzes die Menge R einfach zu der (unendlichen) Basis

$$R' \;=\; \{1, 1+x, 1+x+x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots\}$$

erweitern, indem wir alle Monome ab x^3 zufügen (sie spielen die Rolle der Standardvektoren im K^n). Nach Definition ist eine unendliche Menge linear unabhängig, wenn jede endliche Auswahl nur triviale Linearkombinationen der Null zulässt. Es sei $P \subset R'$ eine solche Auswahl, und wir nehmen an, dass P linear abhängig ist. Dann können wir P noch weiter vergrößern, so dass alle Monome bis zu einem x^n sowie R in P enthalten sind. Die größere Menge ist dann auch linear abhängig, es gibt also eine Nullkombination

$$\lambda_0 \cdot x^0 + \lambda_1 \cdot (1+x) + \lambda_2 \cdot (1+x+x^2) + \sum_{j=3}^{n} \lambda_j x^j \;=\; 0$$

wobei mit der Null auf der rechten Seite das Polynom $0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + \cdots + 0 \cdot x^n$ gemeint ist, das ist der „Nullvektor“ aus $\mathbb{R}[x]$. Da zwei Polynome gleich sind, wenn ihre Koeffizienten gleich sind, folgt sofort $\lambda_3 = \lambda_4 = \cdots = \lambda_n = 0$, und es bleibt

$$\lambda_0 \cdot x^0 + \lambda_1 \cdot (1+x) + \lambda_2 \cdot (1+x+x^2) \;=\; 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 \,.$$

Ausmultiplizieren der linken Seite ergibt $(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)x^0 + (\lambda_1 + \lambda_2)x^1 + \lambda_2 x^2 \;=\; 0$, und damit sukzessive $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$. Also war die Kombination doch trivial, und P ist linear unabhängig. Wir müssen hier noch zeigen, dass P auch ganz $\mathbb{R}[x]$ erzeugt (wegen $\dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$ gilt das Zählen der Basisvektoren hier nicht). Tatsächlich lassen sich die ersten drei Monome wie folgt aus R (und damit R') erzeugen:

$$x^0 = 0 \cdot 1 \;\;,\;\; x^1 = 1 \cdot (x+1) + (-1) \cdot 1 \;\;,\;\; x^2 = 1 \cdot (x^2+x+1) + (-1) \cdot (x+1) \,.$$

Da die Standardbasis $\{x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots$ aus R' erzeugt werden kann, wird der ganze $\mathbb{R}[x]$ aus R' erzeugt.

Aufgabe 31 (Koordinaten ausrechnen) 3 Punkte

Gegeben sind im Folgenden eine Basis und ein Vektor, bestimmen Sie jeweils den Koordinatenvektor des Vektors bzgl der Basis (d. h. berechnen Sie das Urbild unter der bijektiven Abbildung $K^n \to V$ aus Satz 3.3.21):

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \langle\langle\, 1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3 \,\rangle\rangle \subset \mathbb{R}[x]$, $p(x) = x^3 - x^2 + 1$.

(b) $K = \mathbb{C}$, $V = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ mit $w, z \in \mathbb{C}$ beliebig.

(c) $K = \mathbb{Z}_5$, $V = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle = \mathbb{Z}_5^2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$ mit $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ beliebig.

Lösung

Zu a): Wir schreiben

$$x^3 - x^2 + 1 \;\stackrel{!}{=}\; a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x+x^2) + a_3(1+x+x^2+x^3)$$

und lösen nach $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ auf. Koeffizientenvergleich ergibt sofort $a_3 = 1$, da das Monom $1 \cdot x^3$ nicht anders erzeugt werden kann. Subtrahieren von $a_3(1+x+x^2+x^3) = 1+x+x^2+x^3$ auf beiden Seiten ergibt

$$-2x^2 - x \;\stackrel{!}{=}\; a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x+x^2) \,.$$

Nun muss $a_2 = -2$ sein, sonst kann das Monom $-2x^2$ nicht erzeugt werden. Es folgt nach Subtraktion von $a_2(1+x+x^2) = -2 - 2x - 2x^2$ auf beiden Seiten

$$x + 2 \;\stackrel{!}{=}\; a_0 + a_1(1+x) \,.$$

Hier ist $a_1 = 1$ und es bleibt nach Subtraktion von $a_1(1+x) = 1+x$

$$1 \;\stackrel{!}{=}\; a_0 \,.$$

Wir erhalten die Lösung $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 1, -2, 1)$. Da Satz 3.3.21 die Bijektivität von Ψ zeigt ist das auch die einzige Lösung.

Zu b): Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 & + & i\lambda_2 & = & w \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & z \end{cases} , \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \, .$$

Die zweite Gleichung liefert $\lambda_2 = z - \lambda_1$, Einsetzen in die erste Gleichung ergibt dann $\lambda_1 + iz - i\lambda_1 = w$, also

$$\lambda_1 \; = \; \frac{w - iz}{1 - i}$$

und durch Rückeinsetzen die zweite Koordinate

$$\lambda_2 \; = \; z - \frac{w - iz}{1 - i} \, .$$

Zu c): Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda_1 \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{3} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 & + & \bar{2}\lambda_2 & = & \bar{a} \\ \bar{3}\lambda_1 & + & \bar{4}\lambda_2 & = & \bar{b} \end{cases} .$$

Die erste Gleichung ergibt $\lambda_1 = -\bar{2}\lambda_2 + \bar{a} = \bar{3}\lambda_2 + \bar{a}$. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$\bar{3}\lambda_1 + \bar{4}\lambda_2 = \bar{b} \; \Leftrightarrow \; \bar{3}(\bar{3}\lambda_2 + \bar{a}) + \bar{4}\lambda_2 = \bar{b} \; \Leftrightarrow \; \overline{3 \cdot 3 + 4}\lambda_2 = \bar{b} - \bar{3}\bar{a} \, .$$

Wegen $\overline{3 \cdot 3 + 4} = \bar{3}$ und $(\bar{3})^{-1} = \bar{2}$ in $\mathbb{Z}_5$ also

$$\bar{3}\lambda_2 = \bar{b} - \bar{3}\bar{a} \; \Leftrightarrow \; \lambda_2 = \bar{3}^{-1} \cdot (\bar{b} - \bar{3}\bar{a}) \; \Leftrightarrow \; \lambda_2 = \bar{2}(\bar{b} - \bar{3}a) \, .$$

Rückeinsetzen in die erste Gleichung ergibt $\lambda_1 + \bar{2} \cdot (\bar{2}(\bar{b} - \bar{3}a)) = \bar{a}$, also sind die gesuchten Koordinaten

$$\lambda_1 \; = \; \bar{a} - \bar{2} \cdot (\bar{2}(\bar{b} - \bar{3}a)) \; = \; 3\bar{a} + \bar{b} \; , \; \lambda_2 \; = \; \bar{4}\bar{a} + \bar{2}\bar{b} \, .$$

Aufgabe 32 (Der Dimensionssatz für Summenräume) — 3 Punkte

Berechnen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes die Dimension des Summenraums $U + W$, wobei

$$U \; = \; \left\langle\!\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle\!\right\rangle \; , \; W \; = \; \left\langle\!\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle\!\right\rangle$$

jeweils Teilräume des $\mathbb{R}^4$ sind. Anleitung: Bestimmen Sie zuerst die Dimension des Schnitts $U \cap W$.

Lösung

Ein Vektor liegt genau dann im Schnitt, wenn er über den Erzeugern von U, und gleichzeitig über den Erzeugern von W linear kombinierbar ist, wenn es also $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\vec{x} \; = \; \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \; = \; \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder als Gleichungssystem

$$\begin{cases} \lambda_1 & & & = & & & \mu_2 \\ \lambda_1 & & & = & 3\mu_1 & + & 4\mu_2 \\ \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & = & \mu_1 & - & \mu_2 \\ 2\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & 2\mu_1 & + & 2\mu_2 \end{cases} .$$

Aus der ersten Zeile folgt $\lambda_1 = \mu_2$. Wir streichen die erste Zeile und setzen $\mu_2 = \lambda_1$ ein (womit auch die vierte Spalte verschwindet):

$$\begin{cases} -3\lambda_1 & & & = & 3\mu_1 \\ 2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & = & \mu_1 \\ & & 2\lambda_2 & = & 2\mu_1 \end{cases} .$$

Aus der ersten Zeile folgt $\lambda_1 = -\mu_1$. Wir streichen die erste Zeile und setzen $\mu_1 = -\lambda_1$ ein (womit auch die dritte Spalte verschwindet):

$$\begin{cases} 3\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & 0 \end{cases} .$$

Aus der ersten Zeile folgt $\lambda_1 = -\lambda_2$, ebenso aus der zweiten Zeile, also sind wir fertig. Insgesamt kann man also $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ beliebig wählen, dann sind $\lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ aber durch λ_1 festgelegt. Damit ist der Schnitt

$$U \cap W = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ : \ \lambda_1 \in \mathbb{R}\,,\ \lambda_2 = -\lambda_1\,,\ \mu_1 = -\lambda_1\,,\ \mu_2 = \lambda_1 \right\}$$

ein eindimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^4$. Nach dem Dimensionssatz gilt $\dim(U+W) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(U \cap V) = 4 - 1 = 3$, also ist $U+W$ ein dreidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^4$ (insbesondere erzeugen die vier Vektoren nicht den ganzen Raum, da sie linear abhängig sind).

Aufgabe 33 (Matrizen jonglieren) — 4 Punkte

Prüfen Sie, für welche Paare aus den folgenden vier reellen Matrizen das Matrixprodukt existiert. Berechnen Sie für diese Möglichkeiten das Produkt (es gibt 16 mögliche Wahlen, von denen aber nur 7 ein Produkt liefern).

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \ , \ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \mathcal{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Lösung

Nur für die folgenden Wahlen kann man das Produkt bilden, da die Anzahl der Spalten von $\mathcal{A}$ mit der Anzahl der Zeilen von $\mathcal{B}$ übereinstimmt:

$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}$ mit Dimension $(2,2) \cdot (2,2) = (2,2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

$\mathcal{A} \cdot \mathcal{Y}$ mit Dimension $(2,2) \cdot (2,1) = (2,1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

$\mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$ mit Dimension $(3,2) \cdot (2,2) = (3,2)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

$\mathcal{B} \cdot \mathcal{Y}$ mit Dimension $(3,2) \cdot (2,1) = (3,1)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

$\mathcal{X} \cdot \mathcal{A}$ mit Dimension $(1,2) \cdot (2,2) = (1,2)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \end{pmatrix} .$$

$\mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}$ mit Dimension $(1,2) \cdot (2,1) = (1,1)$, Ergebnis ist also eine Zahl:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = (8) = 8 .$$

$\mathcal{Y} \cdot \mathcal{X}$ mit Dimension $(2,1) \cdot (1,2) = (2,2)$, Ergebnis ist also eine Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 34 (Matrixpotenzen) — 2 Punkte

Berechnen Sie per Induktion für $k \in \mathbb{N}$ die Potenzen $\mathcal{A}^k$ der Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung

Die Behauptung ist

$$\mathcal{A}^k \;=\; \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Der Induktionsanfang $k = 1$ ist offenbar richtig. Nun sei die Behauptung für $k \in \mathbb{N}$ schon gezeigt, dann gilt für die nächste Potenz

$$\mathcal{A}^{k+1} \;=\; \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^k \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1+k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

das ist der Induktionsschritt, also gilt die Behauptung für alle $k \in \mathbb{N}$.